Heft 1

Aufg. 2.1.

geg.: $t_1 = 5s$, $a_1 = 2m/s^2$ ges.: $v(t), s(t), v(s), a(s), a(v)$

$t_2 = 10s$, $a_2 = 1m/s^2$

AB: $t=0$; $s=0$; $\dot{s}=0$

Lsg.: Einteilung in 2 Perioden: 1) $0 \le t \le t_1$

2) $t_1 \le t \le t_2$

für 1. Periode: $\ddot{s} = a_1$

$\dot{s} = a_1 \cdot t + c_1$

$s = \frac{a_1}{2} \cdot t^2 + c_1 \cdot t + c_2$

AB: $t=0$, $s=0$, $\dot{s}=0$ $\curvearrowright$ $\underline{c_1 = 0}$; $\underline{c_2 = 0}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\ddot{s}_1 = a_1}}$

$\underline{\underline{\dot{s}_1 = a_1 \cdot t}}$

$\underline{\underline{s_1 = \frac{a_1}{2} \cdot t^2}}$

für 2. Periode: $\ddot{s} = a_2$

$\dot{s} = a_2 \cdot t + c_3$

$s = \frac{a_2}{2} \cdot t + c_3 \cdot t + c_4$

AB: $t = t_1$; $s = \frac{a_1}{2} \cdot t_1^2$; $\dot{s} = a_1 \cdot t_1$

$\Rightarrow$ $a_1 \cdot t_1 = a_2 \cdot t_1 + c_3$

$\curvearrowright$ $\underline{\underline{c_3 = (a_1 - a_2) \cdot t_1}}$

$$\frac{a_1}{2}\cdot t_1^2 = \frac{a_2}{2}\cdot t_1^2 + (a_1-a_2)t_1^2 + c_4$$

$$c_4 = \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2}\right)\cdot t_1^2 - (a_1-a_2)t_1^2$$

$$c_4 = \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{2}\right)\cdot t_1^2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{s} = a_2$$

$$\dot{s} = a_2\cdot t + (a_1-a_2)\cdot t_1$$

$$s = \frac{a_2}{2}\cdot t + (a_1-a_2)t_1\cdot t + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{2}\right)\cdot t_1^2$$

für 1. Periode: $v(t) = a_1\cdot t$

$$s(t) = \frac{a_1}{2}\cdot t^2 \quad \rightsquigarrow t = \sqrt{\frac{2s(t)}{a_1}}$$

$$\hookrightarrow v(s) = a_1\cdot\sqrt{\frac{2s(t)}{a_1}}$$

$$v(s) = \sqrt{2a_1\cdot s}$$

$$a(s) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$a(s) = \frac{1}{\cancel{2}}(2a_1\cdot s)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}a_1 \cdot \dot{s}$$

$$a(s) = \frac{a_1}{\sqrt{2a_1\cdot s}}\cdot a_1\cdot t$$

$$a(s) = \frac{a_1^2 \cdot t}{\sqrt{2a_1 \cdot s}} \quad \text{mit } t = \sqrt{\frac{2s(t)}{a_1}}$$

$$\Rightarrow a(s) = \frac{a_1^2 \cdot \sqrt{\frac{2s}{a_1}}}{\sqrt{2a_1 \cdot s}} = \frac{\sqrt{\frac{2s\,a_1^4}{a_1}}}{\sqrt{2a_1 \cdot s}}$$

$$\underline{\underline{a(s) = a_1}}$$

$$\underline{\underline{a(v) = a_1}}$$

für 2. Periode: $\underline{\underline{v(t) = a_2 \cdot t + (a_1 - a_2) \cdot t_1}}$

$$\underline{\underline{s(t) = \frac{a_2}{2} \cdot t^2 + (a_1 - a_2) \cdot t_1 \cdot t + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{2}\right) t_1^2}}$$

⋮

Aufg. 2.2.

⇝ Punkt bewegt sich längs einer Geraden mit

$v = c \cdot s^2$; AB: $t=0$, $s = s_0$, $v = v_0$

ges.: $a(s)$; $t(s)$; $s(t)$; $v(t)$; $a(t)$

Lsg.: $v(s) = c \cdot s^2$

$$a(s) = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$a(s) = 2 \cdot cs \cdot \dot{s} \quad \text{weil } \dot{s} = v(s) = c \cdot s^2$$

$$\underline{\underline{a(s) = 2c^2 s^3}}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = c \cdot s^2$$

$$\int dt = \int \frac{1}{c \cdot s^2} \cdot ds$$

$$t(s) = -\frac{1}{c \cdot s} + k_1$$

AB: $t = 0$; $s = s_0$

$$k_1 = \frac{1}{cs_0}$$

$$t(s) = -\frac{1}{c \cdot s} + \frac{1}{c \cdot s_0}$$

$$\underline{\underline{t(s) = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{1}{s_0} - \frac{1}{s}\right)}}$$

$$t(s) = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{1}{s_0} - \frac{1}{s} \right)$$

$$t \cdot c = \frac{1}{s_0} - \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} - t \cdot c$$

$$\frac{1 - s_0 t c}{s_0} = \frac{1}{s}$$

$$\underline{s(t) = \frac{s_0}{1 - t \cdot c \cdot s_0}}$$

$$s = \frac{s_0}{1 - t c s_0}$$

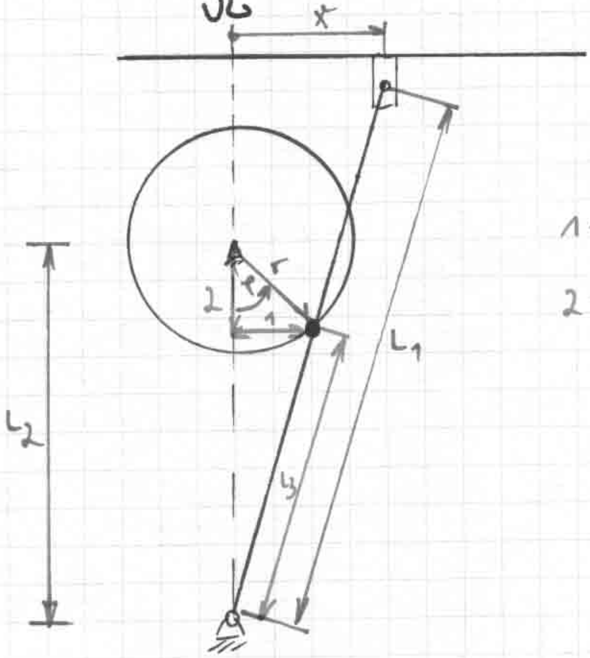
$\vdots$

Aufg. 2.3. Stößelgetriebe einer Waagerecht-Stoßmaschine

ges.: 1) $x(\varphi)$ und $\frac{\dot{x}(\varphi)}{\Omega}$

2) x_{max} und $\frac{\dot{x}_{max}}{\Omega}$

Skizze:



$1 = r \cdot \sin\varphi$

$2 = r \cdot \cos\varphi$

1) $\frac{x(\varphi)}{L_1} = \frac{r \cdot \sin\varphi}{L_3}$

$\Rightarrow x(\varphi) = \frac{L_1 \cdot r \cdot \sin\varphi}{L_3}$ mit $L_3 = \sqrt{(L_2 - r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}$

$$x(\varphi) = \frac{L_1 \cdot r \cdot \sin\varphi}{\sqrt{(L_2 - r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}}$$

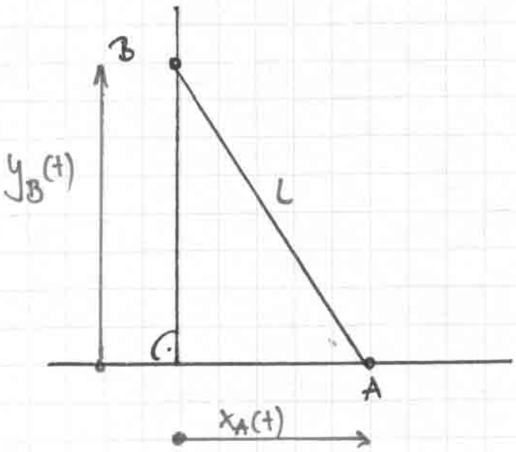
$$x(\varphi) = \frac{L_1 \cdot r \cdot \sin\varphi}{\sqrt{L_2^2 - 2L_2 r\cos\varphi + r^2}}$$

Aufg. 2.4. Geführte starre Stange

geg.: $x_A(t) = \hat{x}_A \sin \Omega t \; ; \; \Omega, L$

ges.: $y_B(t) \; ; \; \dot{y}_B(t) \; ; \; v_S(t)$

Lsg.:



$$\triangle : \; L^2 = x_A^2(t) + y_B^2(t)$$

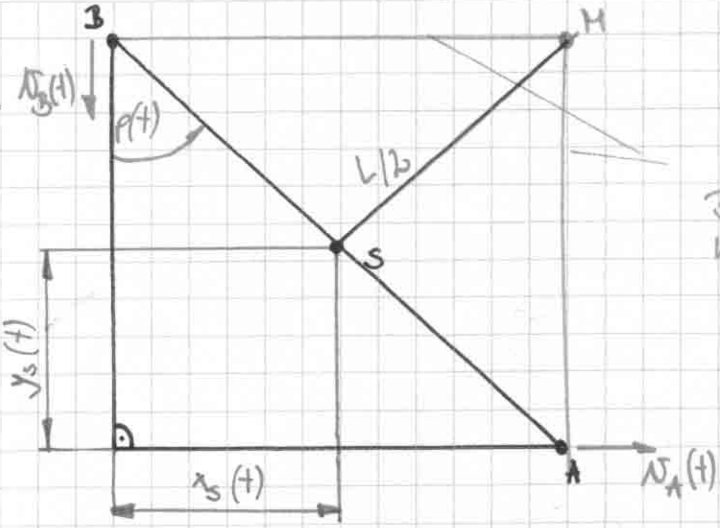
$$y_B = \sqrt{L^2 - x_A^2(t)}$$

$$\underline{\underline{y_B = \sqrt{L^2 - \hat{x}_A^2 \sin^2 \Omega t}}}$$

$$\dot{y}_B(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(L^2 - \hat{x}_A^2 \sin^2 \Omega t\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\hat{x}_A^2 \cdot 2 \cdot \Omega \cos \Omega t \sin \Omega t\right)$$

$$\underline{\underline{\dot{y}_B(t) = \frac{-\hat{x}_A^2 \, \Omega \cos \Omega t \sin \Omega t}{\sqrt{L^2 - \hat{x}_A^2 \sin^2 \Omega t}}}}$$

$v_S(t)$:



M… Momentanpol; Pkt., um den im Moment reine Rotation stattfindet

Winkelgeschw. des Stabes: $\varphi(t) = \arcsin\left(\frac{\hat{x}_A \sin \Omega t}{L}\right)$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\hat{x}_A \cdot \Omega \cos \Omega t}{L \cdot \sqrt{1 - \frac{\hat{x}_A^2}{L^2} \sin^2 \Omega t}}$$

$$\boxed{v_S(t) = r \cdot \omega}$$

$$v_S(t) = \overbrace{\frac{L}{2}} \cdot \overbrace{\dot{\varphi}(t)}$$

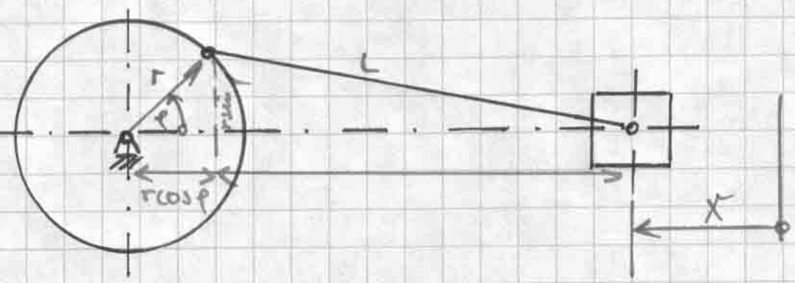
$$v_S(t) = \frac{\hat{x}_A \, \Omega \cdot \cos \Omega t}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{\hat{x}_A^2}{L^2} \cdot \sin^2 \Omega t}}$$

Aufg. 2.5 zentrische Schubkurbel

geg.: $\frac{r}{L} = \lambda$; $\varphi = \omega \cdot t$ $(\omega = \text{konst})$

$x(\varphi = 0) = 0$

ges.: $\frac{x}{r}$; $\frac{\dot{x}}{r\omega}$; $\frac{\ddot{x}}{r\omega^2}$



$$x(t) = (r + L) - \left(r\cos\varphi + \sqrt{L^2 - r^2\sin^2\varphi}\right) \quad |:r$$

$$\frac{x}{r} = 1 + \frac{L}{r} - \cos\varphi - \sqrt{\frac{L^2}{r^2} - \sin^2\varphi}$$

$$\frac{x}{r} = 1 + \frac{L}{r} - \cos\varphi - \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}$$

$$\frac{x}{r} = 1 + \frac{1}{\lambda} - \cos\varphi - \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \qquad \text{mit } \dot{\varphi} = \omega$$

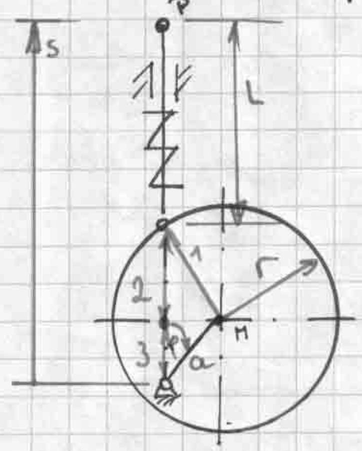
$$\vdots$$

Aufg. 2.6. Kreisförmiger Exzenter

geg.: $r, a, L, \varphi = \varphi(t)$; $\dot{\varphi} = \text{konst.}$, $\frac{a}{r} = \lambda$

ges.: $s, \dot{s}, \ddot{s}$ von P als Fkt $\varphi(t)$

Skizze:



$1 = r$

$3 = a \cdot \cos\varphi$

$2 = \sqrt{(a \sin\varphi)^2 + r^2}$

$$\rightsquigarrow s = L + a\cos\varphi + \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\varphi}$$

$$s = L + a\cos\varphi + r\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}$$

$$\rightsquigarrow \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega$$

$$\dot{s} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \omega$$

$$\rightsquigarrow \ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{d\varphi} \cdot \frac{d\dot{\varphi}}{dt}$$

Aufg. 2.9. Planetenrad

geg.: $r, R, \dot{\varphi} = \Omega = \text{konst.}$

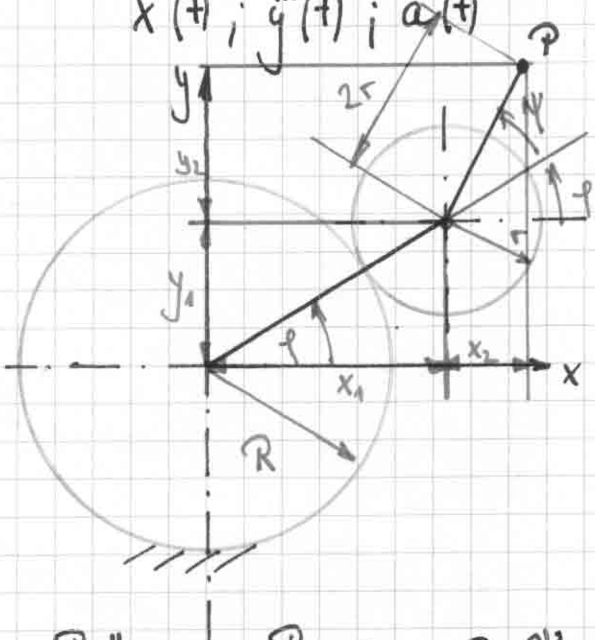
$\psi(\varphi = 0) = 0$

ges.: für P : $x(t)\,;\ y(t)$

$\dot{x}(t)\,;\ \dot{y}(t)\,;\ v(t)$

$\ddot{x}(t)\,;\ \ddot{y}(t)\,;\ a(t)$

Skizze:



reines Rollen: $R \cdot \varphi = r \cdot \psi$

$\dot{\varphi} = \Omega = \text{konst.}$ $\curvearrowright$ $\varphi = \Omega \cdot t + C_1$ mit AB: $t = 0,\ \varphi = 0$

$\curvearrowright C_1 = 0$

$$\underline{\underline{\varphi = \Omega \cdot t}}$$

$\underline{\underline{x = x_1 + x_2}}$: $x_1 = (R + r) \cdot \cos\varphi$

$x_2 = 2r \cdot \cos(\varphi + \psi)$

$\curvearrowright x = (R + r) \cdot \cos\varphi + 2r \cdot \cos(\varphi + \psi)$

mit $\varphi = \Omega t$ und $\psi = \frac{R}{r} \cdot \varphi = \frac{R}{r} \cdot \Omega t$

$$\Rightarrow x(t) = (R+r)\cdot \cos \Omega t + 2r \cdot \cos\left(\Omega t + \frac{R}{r}\cdot \Omega t\right)$$

$$\underline{\underline{x(t) = (R+r)\cdot \cos \Omega t + 2r \cdot \cos\left(\Omega t\left(1+\frac{R}{r}\right)\right)}}$$

$\underline{\underline{y = y_1 + y_2:}}$ $\quad y_1 = (R+r)\cdot \sin\varphi$

$\quad y_2 = 2r \cdot \sin(\varphi + \psi)$

$$\curvearrowright y = (R+r)\cdot \sin\varphi + 2r\cdot \sin(\varphi+\psi)$$

mit $\varphi = \Omega t$ und $\psi = \frac{R}{r}\cdot\varphi = \frac{R}{r}\cdot\Omega\cdot t$

$$\Rightarrow y(t) = (R+r)\cdot \sin \Omega t + 2r\cdot \sin\left(\Omega t + \frac{R}{r}\Omega t\right)$$

$$\underline{\underline{y(t) = (R+r)\cdot \sin \Omega t + 2r \sin\left(\Omega t\left(1+\frac{R}{r}\right)\right)}}$$

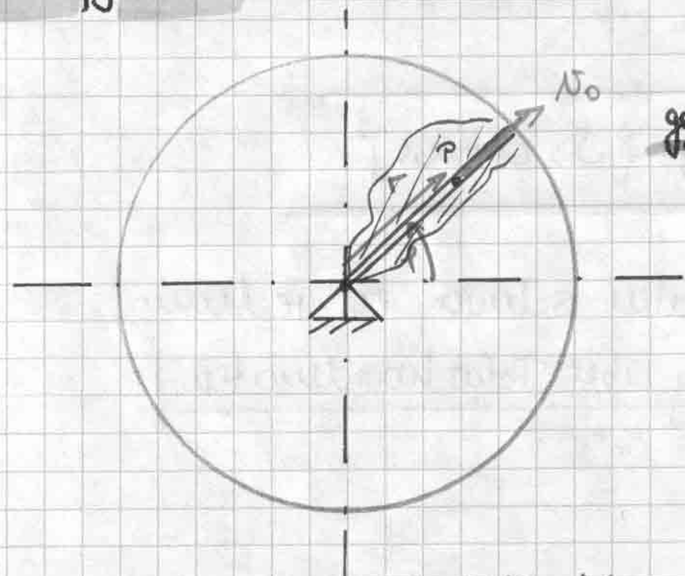
$\underline{\underline{\dot{x} = \frac{dx}{dt}:}}$ $\quad \dot{x}(t) = (R+r)\cdot(-\Omega)\cdot \sin\Omega t - 2r\cdot \sin\left(\Omega t\left(1+\frac{R}{r}\right)\right)\cdot \left(\Omega + \frac{R}{r}\Omega\right)$

$$\underline{\underline{\dot{x}(t) = -(R+r)\cdot\Omega\cdot\sin\Omega t - (2r\Omega + 2R\Omega)\cdot \sin\left(\Omega t\left(1+\frac{R}{r}\right)\right)}}$$

$\underline{\underline{\dot{y} = \frac{dx}{dt}:}}$ $\quad \underline{\underline{\dot{y}(t) = (R+r)\cdot\Omega\cdot\cos\Omega t + (2r\Omega + 2R\Omega)\cdot\cos\left(\Omega t\left(1+\frac{R}{r}\right)\right)}}$

$\underline{\underline{v(t) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}:}}$ $\quad \underline{\underline{v(t) = \Omega(R+r)\sqrt{5 + 4\cdot\cos\frac{R}{r}\cdot\Omega t}}}$

Aufg. 2.10. radiale Nut



geg.: - schwingende Bewegung:

$\varphi = \hat{\varphi} \sin \Omega t$

- $v_0 = \text{konst}$

- $\hat{\varphi}, \Omega$

AB: $t = 0;\ r = r_0;\ \dot{r} = v_0$

Absolutgeschw. + Absolutbeschleunigung von P mit

a) kartesischen Koordinaten

$\underline{v_0 = \text{konst}} \curvearrowright s = r = \int v_0 \, dt$

$r = v_0 \cdot t + c_1$

mit AB: $t = 0,\ r = r_0 \curvearrowright c_1 = r_0$

$$r(t) = v_0 \cdot t + r_0$$

$\vec{v} = \dot{x}_p \vec{e}_x + \dot{y}_p \cdot \vec{e}_y$

$x_p = r \cdot \cos \varphi$

$x_p = (v_0 \cdot t + r_0) \cdot \cos \varphi$

$x_p = (v_0 \cdot t + r_0) \cdot \cos(\hat{\varphi} \sin \Omega t)$

$\dot{x}_p = v_0 \cdot \cos(\hat{\varphi} \sin \Omega t) + (v_0 \cdot t + r_0)(-\sin(\hat{\varphi} \sin \Omega t) \cdot \hat{\varphi} \Omega \cos \Omega t)$

$y_p = r \cdot \sin \varphi$

$y_p = (v_0 \cdot t + r_0) \cdot \sin(\hat{\varphi} \sin \Omega t)$

$\dot{y}_p = v_0 \cdot \sin(\hat{\varphi} \sin \Omega t) + (v_0 \cdot t + r_0) \cdot \cos(\hat{\varphi} \sin \Omega t) \cdot \hat{\varphi} \cos \Omega t \cdot \Omega$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2}$$

$$\underline{\underline{|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + \left[(r_0 + v_0 t)\cdot \hat{\varphi}\,\Omega \cos \Omega t\right]^2}}}$$

$\rightsquigarrow$ mit kart. Koordinaten schwer zu rechnen, deshalb <u>besser</u>: <u>Weg über Polarkoordinaten</u> !

<u>b) Polarkoordinaten</u>

$$r(t) = v_0 \cdot t + r_0$$
$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \sin \Omega t$$

$$\underline{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi}$$

$$\dot{r} = v_0$$
$$\dot{\varphi} = \hat{\varphi}\,\Omega \cos \Omega t$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}$$
$$\underline{\underline{= \sqrt{v_0^2 + \left[(v_0 \cdot t + r_0)\cdot \hat{\varphi}\,\Omega \cos \Omega t\right]^2}}}$$

$$\underline{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi}$$

$$\ddot{r} = 0$$
$$\ddot{\varphi} = -\hat{\varphi}\,\Omega^2 \sin \Omega t$$

$$\vec{a} = \left[-(v_0 \cdot t + r_0)\cdot(\hat{\varphi}^2 \Omega^2 \cos^2 \Omega t)\right]\cdot \vec{e}_r \;+$$
$$2 \cdot v_0 \cdot \hat{\varphi}\,\Omega \cos \Omega t + (v_0 \cdot t + r_0)(-\hat{\varphi}\,\Omega^2 \sin \Omega t)\cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\underline{\underline{|\vec{a}| = \sqrt{\left[-(v_0 \cdot t + r_0)(\hat{\varphi}^2 \Omega^2 \cos^2 \Omega t)\right]^2 + \left[2 v_0 \hat{\varphi}\,\Omega \cos \Omega t + (v_0 \cdot t + r_0)(-\hat{\varphi}\,\Omega^2 \sin \Omega t)\right]^2}}}$$

c) Relativbewegung mit Vektoren (Bahnkoordinaten)

Überlagerung von Translation und Rotation !

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{R} = konst \curvearrowright \dot{\vec{R}} = 0$$

$$\curvearrowright \vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_{rel}$$

$$\omega = \dot{\varphi} = \hat{\varphi}\,\Omega \cos \Omega t$$

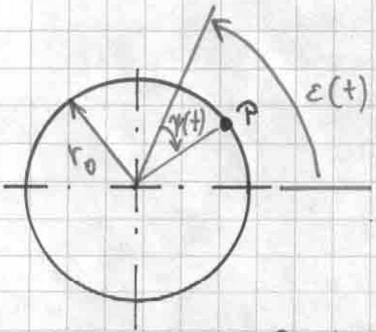
$$r = v_0 \cdot t + r_0$$

$$v_{rel} = v_0$$

$$\sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = 1$$

$$\rightarrow \underline{|\vec{v}| = \sqrt{(\omega \cdot r \cdot \sin(\omega, r))^2 + v_{rel}^2}}$$

Aufg. 2.11. rotierende Scheibe



geg.: $\varepsilon(t)$, $\psi(t)$, r_0

ges.: $|\vec{v}|$, $|\vec{a}|$

a) als einfache Kreisbewegung

$r = r_0 = \text{konst.}$ $\qquad \varphi = \varepsilon(t) - \psi(t)$

$\dot{r} = 0$ $\qquad \dot{\varphi} = \dot{\varepsilon}(t) - \dot{\psi}(t)$

$\qquad \ddot{\varphi} = \ddot{\varepsilon}(t) - \ddot{\psi}(t)$

$\rightsquigarrow$ $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$$\vec{v} = 0 + \left(r_0 \cdot \left(\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\psi}(t)\right)\right)\vec{e}_\varphi$$

$$|\vec{v}| = r_0 \cdot \left(\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\psi}(t)\right)$$

$\rightsquigarrow$ $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$

$$\vec{a} = \left(0 - r_0 \cdot \left(\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\psi}(t)\right)^2\right)\vec{e}_r + \left(r_0 \cdot \left(\ddot{\varepsilon}(t) - \ddot{\psi}(t)\right)\right)\vec{e}_\varphi$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{r_0^2\left(\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\psi}(t)\right)^4 + r_0^2 \cdot \left(\ddot{\varepsilon}(t) - \ddot{\psi}(t)\right)^2}$$

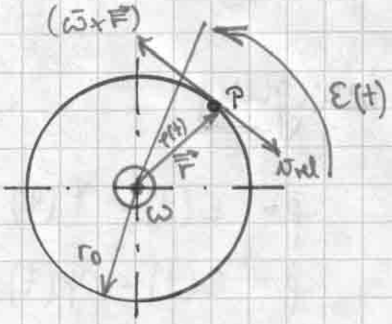
b) als Relativbewegung mit Vektoren

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{R} = \text{konst} \rightarrow \dot{\vec{R}} = 0$$

$$\rightarrow \vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_{rel}$$

Skizze:



$|\vec{\omega}| = \dot{\varepsilon}(t)$

$|\dot{\vec{\omega}}| = \ddot{\varepsilon}(t)$

$|\vec{r}| = r_0$

$|\vec{v}_{rel}| = r_0 \cdot \dot{\psi}(t)$

$|(\vec{\omega} \times \vec{r})| = \dot{\varepsilon}(t) \cdot r_0$

$$\rightsquigarrow v = \dot{\varepsilon}(t) \cdot r_0 - \dot{\psi}(t) \cdot r_0$$

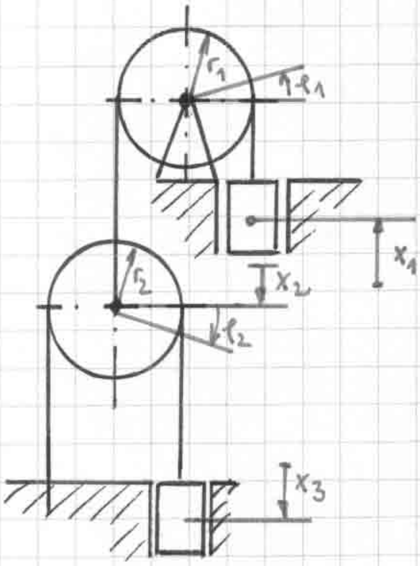
$$\underline{\underline{v = r_0 \left(\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\psi}(t) \right)}}$$

Aufg. 2.12. 2 Systeme

geg.: r_1, r_2

ges.: freie Koordinaten, Zwangsbedingungen, Freiheitsgrad

a)



freie Koordinaten: x_1, x_2, x_3

φ_1, φ_2

ZB:

$x_1 = r_1 \varphi_1$

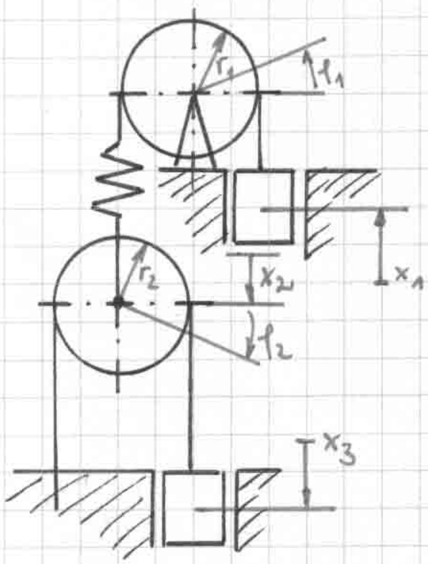
$x_1 = x_2$

$x_2 = r_2 \varphi_2$

$x_3 = x_2 + r_2 \varphi_2$

Freiheitsgrad: $f = 1$

b)



freie Koordinaten: x_1, x_2, x_3

φ_1, φ_2

ZB:

$x_1 = r_1 \varphi_1$

$x_2 = r_2 \varphi_2$

$x_3 = x_2 + r_2 \varphi_2$

Freiheitsgrad: $f = 2$

Aufg. 2.14 Rütteltisch

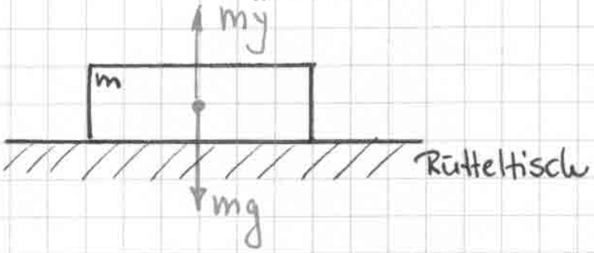
geg.: $y = \hat{y} \sin \Omega t$

$\hat{y} = 1 mm$

$g = 9{,}81\, m/s^2$

ges.: Ω für Abheben

Skizze:



Gleichgewicht: (Abhebebedingung)

$$m \cdot g = m \cdot \ddot{y}$$

$$g = \ddot{y}$$

$$y = \hat{y} \sin \Omega t$$

$$\dot{y} = \hat{y} \cdot \Omega \cdot \cos \Omega t$$

$$\ddot{y} = -\hat{y} \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$\leadsto \quad g = -\hat{y} \Omega^2 \underbrace{\sin \Omega t}_{\text{Maximum: } = 1}$$

$$g = -\hat{y} \Omega^2$$

$$\Omega = \sqrt{\left| \frac{g}{-\hat{y}} \right|}$$

$$\underline{\underline{\Omega = 99{,}05 \ \frac{1}{s}}}$$

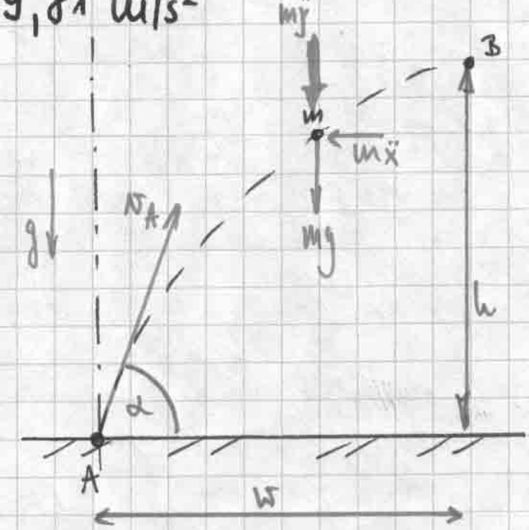
Aufg. 2.15. Punktmasse, Wurfparabel

geg.: $v_A = 20\,m/s$ ges.: 1) $\sphericalangle\,\alpha$

$w = h = 10\,m$ 2) $v_{A\,min}$, α_{min}

$g = 9{,}81\,m/s^2$

Skizze:



$\curvearrowright$: $\uparrow$: $-m\ddot{y} = m\cdot g$ $\rightarrow$: $0 = m\ddot{x}$

$\underline{\ddot{y} = -g}$ $\underline{\ddot{x} = 0}$

Integration: $\dot{y} = -g\cdot t + c_1$ $\dot{x} = c_2$

für $t=0$: $\dot{y} = v_A\cdot\sin\alpha$, $\dot{x} = v_A\cdot\cos\alpha$

$\curvearrowright$ $\underline{\dot{y} = -g\cdot t + v_A \sin\alpha}$, $\underline{\dot{x} = v_A\cdot\cos\alpha}$

Integration: $y = -\frac{g}{2}t^2 + v_A\sin\alpha\cdot t + c_3$, $x = v_A\cdot\cos\alpha\cdot t + c_4$

für $t=0$: $x=0$, $y=0$ $\curvearrowright$ $c_3 = 0$, $c_4 = 0$

$\curvearrowright$ $\underline{\underline{y = -\frac{g}{2}t^2 + v_A\sin\alpha\cdot t}}$ $\underline{\underline{x = v_A\cdot\cos\alpha\cdot t}}$

Elimination der Zeit: $t = \frac{x}{v_A\cdot\cos\alpha}$

$$\rightarrow y = -\frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{v_A^2\cos^2\alpha} + v_A\cdot\sin\alpha\cdot\frac{x}{v_A\cos\alpha}$$

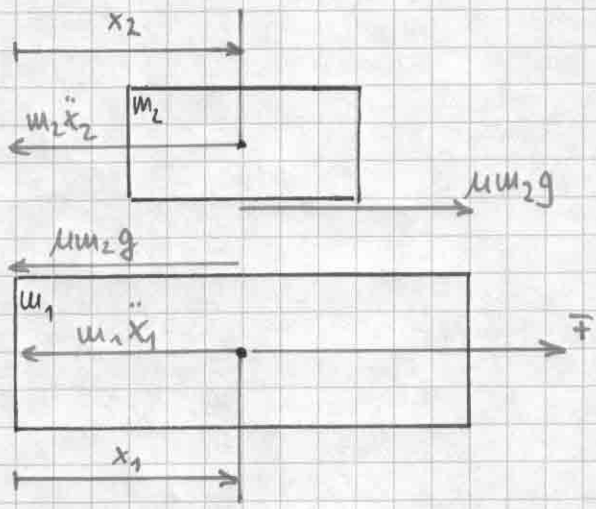
Gleichung d. Wurfparabel: $y = -\frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{v_A^2\cos^2\alpha} + x\cdot\tan\alpha$

Aufg. 2.18. Beschleunigung eines Wagens mit Masse

geg.: $m_1 = 600\,kg$
$m_2 = 100\,kg$
$\mu_0 = 0{,}25$
$\mu = 0{,}15$
$g = 9{,}81\,m/s^2$

ges.: 1) Beschleunigung von m_1 und m_2 für $F = 2000\,N$
2) F^*, damit Ladung nicht gleitet

Lsg.: Skizze:



1)

$$\leftarrow:\ m_1\ddot{x}_1 + \mu m_2 g - F = 0$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{F - \mu m_2 g}{m_1}$$

$$\underline{\underline{\ddot{x}_1 = 3{,}088\,m/s^2}}$$

$$\leftarrow:\ m_2\ddot{x}_2 \mp \mu m_2 g = 0$$

$$\ddot{x}_2 = \mu g$$

$$\underline{\underline{\ddot{x}_2 = 1{,}4715\,m/s^2}}$$

2) $\underline{\ddot{x}_1 \overset{!}{=} \ddot{x}_2}$: $\dfrac{F^* - \mu_0 m_2 g}{m_1} = \mu_0 g$

$$F^* = m_1\mu_0 g + m_2\mu_0 g$$

$$\underline{\underline{F^* = 1716{,}75\,N}}$$

Aufg. 2.19. Rotor Axialkolbenpumpe

geg.: $a = 15\,cm$ | $\rho = 7{,}5\,g/cm^3$ | ges.: n nach $t = 2 \cdot t_1$

$b = 10\,cm$

$D = 12\,cm$ | $M_1 = 0{,}4\,Nm$

$d = 2{,}5\,cm$

$e = 3{,}5\,cm$ | $t_1 = 2s$

⇝ Drehzahl (Geschwindigkeit) - Zeit - Zusammenhang

↯ Impulsatz

$$\int_{t_0}^{t_1} M_K\,dt = J_K\,\omega_1 - J_K\,\omega_0$$

⇝ Berechnung von J_K:

$$J_K = \frac{m_z D^2}{8} - 6 \cdot \left(\frac{m_B d^2}{8} + m_B e^2\right)$$

$$m_z = (\text{Masse Vollzylinder}) = \rho \cdot V_z$$

$$V_z = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot a$$

$$\underline{m_z = \rho \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot a}$$

$$m_B = (\text{Masse Bohrung}) = \rho \cdot V_B$$

$$V_B = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot b$$

$$\underline{m_B = \rho \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot b}$$

$$J_K = \frac{\rho \cdot \pi \cdot D^4 \cdot a}{32} - 6 \cdot \left(\frac{\rho \cdot \pi \cdot d^4 \cdot b}{32} + \rho \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot b \cdot e^2\right)$$

$$\underline{\underline{J_K = 200{,}2\,kg\,cm^2}}$$

$\rightsquigarrow \quad t_0 = 0$

$t_1 = 2s$

zeitl. Verlauf des Moments:

$0 \le t \le t_1 \; : \; M(t) = \frac{M_1}{t_1} \cdot t$

$t_1 \le t \le t_2 \; : \; M(t) = M_1$

$$\rightsquigarrow \int_0^{t_1} \frac{M_1}{t_1} \cdot t \; dt + \int_{t_1}^{t_2} M_1 \, dt = J_K \, \omega_1$$

$\omega_1 = 2\pi n$

$t_2 = 2t_1$

$$\frac{M_1 \cdot t_1^{\cancel{2}}}{2 \cdot \cancel{t_1}} + M_1 \cdot (2t_1 - \cancel{t_1}) = J_K \cdot 2\pi n$$

$$\frac{M_1 \cdot t_1}{2} + M_1 t_1 = J_K \; 2\pi n$$

$$n = \frac{3 M_1 t_1}{4\pi \; J_K}$$

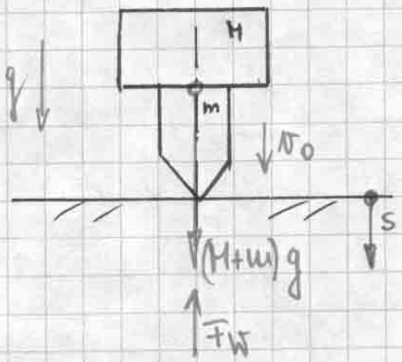
$$\underline{\underline{n = 9{,}54 \, s^{-1} = 572{,}39 \, \text{min}^{-1}}}$$

Aufg. 2.26. Ramm-Bär

geg.: $m, M, v_0, F_1, F_0, s_1, g$

ges.: s_E

Skizze:



⇝ Kraft-Weg-Zusammenhang

↷ Arbeitssatz

$$\int_{s_0}^{s_1} F_s \, ds = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}$$

mit: $s_0 = 0$
$s_1 = s_E$

max. Eindringtiefe erreicht, wenn $v_1 = 0$

$$\curvearrowright \int_0^{s_E} F_s \, ds = -\frac{m v_0^2}{2}$$

F_s ... Kraft entlang des Weges

$$F_s = (M+m)g - F_W$$

F_W aus Diagramm:

$$F_W = \frac{F_1}{s_1} \cdot s + F_0$$

$$\curvearrowright F_s = (M+m)g - \frac{F_1}{s_1} \cdot s + F_0$$

$$\Rightarrow \int_0^{s_E} (M+m)\cdot g - \frac{F_1}{s_1} \cdot s + F_0 = \frac{-(m+M)\cdot v_0^2}{2}$$

$$(M+m)\cdot g \cdot s_E - \frac{F_1}{2 s_1} \cdot s_E^2 + F_0 \cdot s_E = \frac{-(m+M)\cdot v_0^2}{2}$$

$$-\frac{F_1}{2 s_1} \cdot s_E^2 + \left[(M+m)\cdot g + F_0\right] \cdot s_E + \frac{(m+M)\cdot v_0^2}{2} = 0$$

$$s_E^2 + \frac{((m+M)\cdot g + F_0)2s_1}{-F_1} \cdot s_E + \frac{(m+M)\cdot v_0^2 \cdot 2s_1}{-2F_1} = 0$$

mit quadrat. Lösungsformel:

$\curvearrowright s_{1/2} = \quad \ldots$

Aufg. 2.27. Bewegung Punktmasse

geg.: r, g ges.: h

→ Punktmasse soll durch Kreismittelpunkt fallen

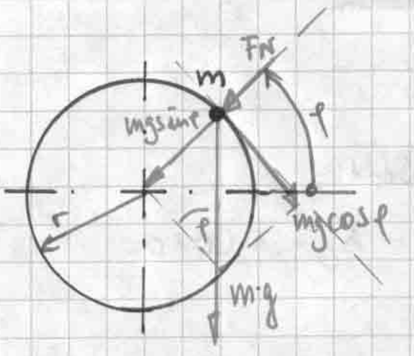
→ Bewegung erfolgt reibungsfrei ⇝ Energiesatz

Lsg d. Aufg. in 3 Teilen: 1) schräger Wurf

2) Bewegung auf Kreisbahn

3) Energiesatz

Bewegung auf Kreisbahn:



$$F_N = m\cdot a$$

$$\leadsto m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = -F_N - mg\sin\varphi$$

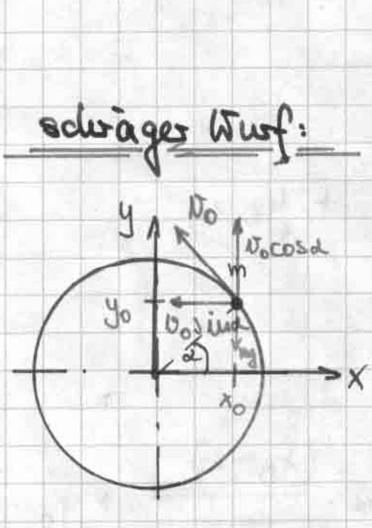
Ablösen von der Bahn: $\varphi = \alpha$; $\dot\varphi = \omega = \frac{v_0}{r}$; $F_N = 0$

$$-mg\sin\alpha = -mr\dot\varphi^2$$

$$g\sin\alpha = r\cdot\frac{v_0^2}{r^2}$$

$$\underline{\underline{v_0 = \sqrt{gr\sin\alpha}}}$$

schräger Wurf:



$$\uparrow:\quad m\cdot g + m\ddot y = 0$$

$$\underline{\underline{-g = \ddot y}}$$

$$\rightarrow:\quad -m\ddot x = 0$$

$$\underline{\underline{-\ddot x = 0}}$$

Integration: AB: $t=0$, $\dot{y}= v_0 \cos\alpha$; $\dot{x}= v_0 \sin\alpha$

$y_0 = r\cdot\sin\alpha$; $x_0 = r\cdot\cos\alpha$

$\ddot{y} = -g$

$\dot{y} = -g\cdot t + c_1 \quad \rightsquigarrow$ mit AB: $c_1 = v_0 \cos\alpha$

$y = -\frac{g}{2}t^2 + c_1 t + c_2 \quad \rightsquigarrow$ mit AB: $c_2 = y_0 = r\cdot\sin\alpha$

$$\Rightarrow y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\cos\alpha\cdot t + \underbrace{r\sin\alpha}_{y_0}$$

$-\ddot{x} = 0$

$\dot{x} = -c_3 \quad \rightsquigarrow$ mit AB: $c_3 = v_0 \sin\alpha$

$x = -c_3\cdot t + c_4 \quad \rightsquigarrow$ mit AB: $c_4 = x_0 = r\cos\alpha$

$$\Rightarrow x = -v_0\sin\alpha\cdot t + \underbrace{r\cos\alpha}_{x_0}$$

Elimination der Zeit: $t = \dfrac{x - x_0}{-v_0\sin\alpha}$

$$t = \frac{x_0 - x}{v_0\sin\alpha}$$

$$\rightsquigarrow y = -\frac{g}{2}\cdot\left(\frac{x_0 - x}{v_0\sin\alpha}\right)^2 + v_0\cos\alpha\cdot\frac{x_0 - x}{v_0\sin\alpha} + y_0$$

mit $v_0^2 = rg\sin\alpha \quad \Rightarrow$

$$y = -\frac{\cancel{g}}{2}\cdot\frac{(x_0 - x)^2}{r\cancel{g}\sin^3\alpha} + \cancel{\sqrt{rg\sin\alpha}}\cdot\cos\alpha\cdot\frac{(x_0 - x)}{\cancel{\sqrt{rg\sin\alpha}}\sin\alpha} + y_0$$

$$y = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_0 - x)^2}{r\sin^3\alpha} + \cos\alpha\,\frac{(x_0 - x)}{\sin\alpha} + y_0$$

mit $x_0 = r \cdot \cos\alpha$, $y_0 = r \cdot \sin\alpha$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(r\cos\alpha - x)^2}{r\sin^3\alpha} + \cos\alpha \cdot \frac{(r\cos\alpha - x)}{\sin\alpha} + r\sin\alpha$$

$$y = y(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2\cos^2\alpha - 2r\cos\alpha \cdot x + x^2}{r\sin^3\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(r\cos\alpha - x) + r\sin\alpha$$

$$\underline{\underline{y(x) = r\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(r\cos\alpha - x) - \frac{(r\cos\alpha - x)^2}{2r\sin^3\alpha}}}$$

$\rightsquigarrow$ Punktmasse soll durch Kreismittelpunkt fallen:

$\rightsquigarrow y = 0 \; ; \; x = 0$

$$0 = r\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot r\cos\alpha - \frac{r^{\cancel{2}}\cos^2\alpha}{2\cancel{r}\sin^3\alpha} \quad \Big| : r$$

$$0 = \sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{2\sin^3\alpha}$$

$$0 = \frac{3}{2}\sin^2\alpha - \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}}}$$

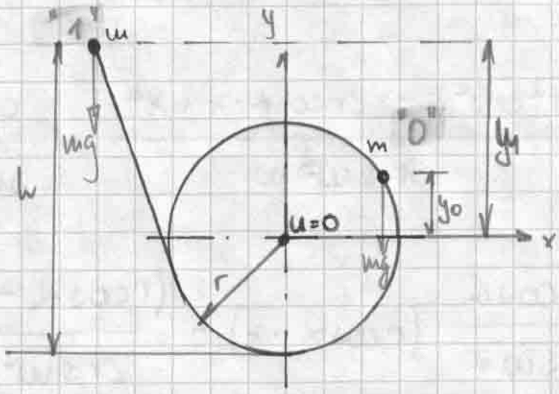
mit $v_0^2 = rg \cdot \sin\alpha$

$$\underline{\underline{v_0^2 = r \cdot g \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}}$$

$\leadsto$ Energiesatz:

$$U_0 + T_0 = U_1 + T_1$$

Skizze:



$$T_0 = \frac{m}{2} v_0^2 \qquad T_1 = 0$$

$$U_0 = mg \cdot y_0 \qquad U_1 = m \cdot g \cdot y_1$$

$$\leadsto \quad \frac{m}{2} v_0^2 + mg y_0 = mg y_1$$

$$\text{mit } v_0^2 = r \cdot g \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\cancel{m}}{2} \cdot r \cancel{g} \sqrt{\frac{1}{3}} + \cancel{mg} y_0 = \cancel{mg} y_1$$

$$y_1 = y_0 + \frac{r}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \text{mit } h = r + y_1$$

$$h = r + y_0 + \frac{r}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \text{mit } y_0 = r \sin\alpha$$

$$h = r + r\sin\alpha + \frac{r}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \text{mit } \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

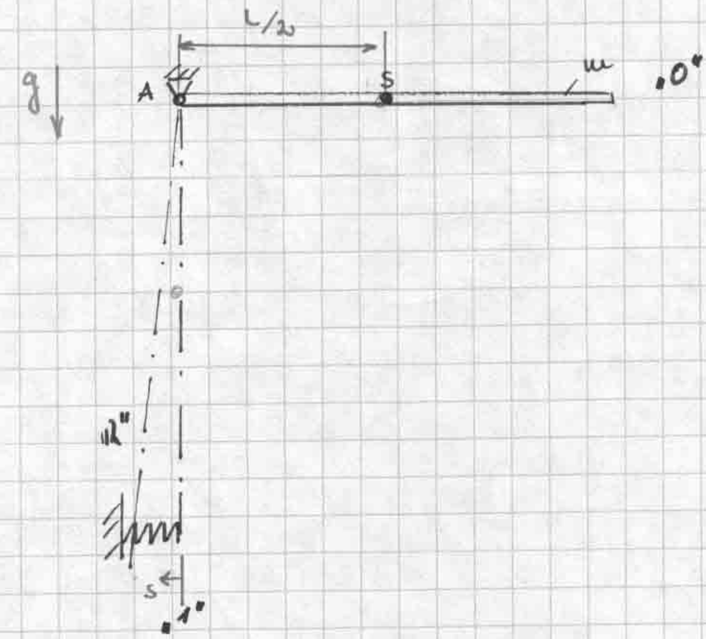
$$h = r\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

Aufg. 2.28.

geg.: $m = 2\,kg$ $\quad g = 10\,m/s^2$ $\qquad$ ges.: Δs , $s \ll L$

$L = 1\,m$ $\quad c = 2 \cdot 10^5\,N/m$

Skizze:



Energiesatz: $U_0 + T_0 = U_1 + T_1$

$$U_0 = m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \qquad T_0 = 0$$

$$U_1 = 0 \qquad T_1 = \frac{m}{2} v_1^2$$

$$\rightsquigarrow \quad m \cdot g \cdot \frac{L}{2} = \frac{m}{2} v_1^2 = \underline{\underline{10\,Nm}}$$

$$T_1 \stackrel{!}{=} U_2 \qquad U_2 = \frac{c}{2} \cdot \Delta s^2$$

$$10\,Nm = \frac{c}{2} \cdot \Delta s^2$$

$$\sqrt{\frac{20\,Nm}{c}} = \Delta s$$

$$\Delta s = 0{,}01\,m$$

$$\underline{\underline{\Delta s = 10\,mm}}$$

Aufg. 2.30 Reibkupplung

geg.: $M = 100\,Nm$ $\quad J_2 = 3\,kg\cdot m^2$

$\mu = 0{,}3$ $\quad b = 10\,cm$

$\omega_1 = 300\,s^{-1}$ $\quad p = 20\,N/cm^2$

$J_1 = 0{,}3\,kg\cdot m^2$

ges.: 1) t_K

2) Verläufe $\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \varphi$

3) p_{min}

4) Energieverlust

Berechnung des Reibmomentes M_R

$$dM_R = dF_R \cdot r$$

$$dM_R = \mu \cdot dF_N \cdot r$$

$$dF_N = p \cdot dA$$

$$= p \cdot r\,d\varphi\,dr$$

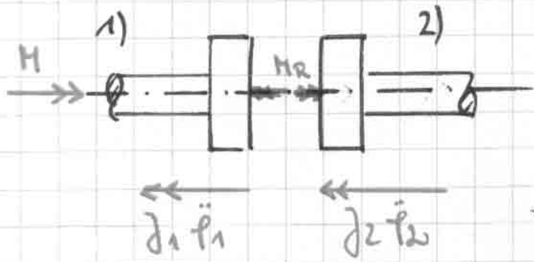
$$dM_R = \mu \cdot p \cdot r^2\,d\varphi\,dr$$

$$\curvearrowright \quad M_R = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{b} \mu p r^2\,dr\,d\varphi$$

$$M_R = \frac{2}{3}\pi\,\mu \cdot p \cdot b^3$$

$$\underline{\underline{M_R = 125{,}7\,Nm}}$$

zu 2) Verläufe $\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \varphi$



$\Rightarrow$ d'Alembertsche Hilfsmomente

Scheibe 1: $\sum \curvearrowleft : \stackrel{!}{=} 0$

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + M_R - M = 0$$

Scheibe 2: $\sum \curvearrowleft : \stackrel{!}{=} 0$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - M_R = 0$$

$$\curvearrowright \quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{M - M_R}{J_1}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{(M - M_R)}{J_1} t + C_1 \qquad \varphi_1 = \frac{(M - M_R)}{2 J_1} t^2 + C_1 t + C_2$$

AB: $t = 0 \ ; \ \dot{\varphi}_1 = \Omega_1 \ ; \ \varphi_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi}_1 = \Omega_1 = C_1 \qquad \varphi_1 = 0 = C_2$$

$$\curvearrowright \quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{M - M_R}{J_1}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{M - M_R}{J_1} \cdot t + \Omega$$

$$\varphi_1 = \frac{M - M_R}{2 J_1} \cdot t^2 + \Omega \cdot t$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}_2 = \frac{M_R}{J_2}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{M_R}{J_2} \cdot t + c_3$$

$$\varphi_2 = \frac{M_R}{2 J_2} \cdot t^2 + c_3 \cdot t + c_4$$

AB: $t = 0 \; ; \; \dot{\varphi}_2 = 0 \; ; \; \varphi_2 = 0$

$$\Rightarrow c_3 = 0 \; ; \; c_4 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}_2 = \frac{M_R}{J_2}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{M_R}{J_2} \cdot t$$

$$\varphi_2 = \frac{M_R}{2 J_2} \cdot t^2$$

zu 1) Kuppelzeit t_K

→ Kuppeln ist beendet, wenn $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$ (für t_K)

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$$

$$\frac{M - M_R}{J_1} \cdot t_K + \Omega = \frac{M_R}{J_2} \cdot t_K$$

$$t_K \left(\frac{M - M_R}{J_1} - \frac{M_R}{J_2} \right) = -\Omega$$

$$t_K = \frac{\Omega}{\frac{M_R}{J_2} - \frac{M - M_R}{J_1}} = 2{,}35\,s$$

zu3) p_{min}

⇝ Kuppelzeit muß endlich sein, also gilt:

$$\frac{M_R}{\vartheta_2} + \frac{M_R - M}{\vartheta_1} > 0$$

$$\frac{M_R}{\vartheta_2} + \frac{M_R}{\vartheta_1} - \frac{M}{\vartheta_1} > 0$$

$$M_R\left(\frac{1}{\vartheta_2} + \frac{1}{\vartheta_1}\right) = \frac{M}{\vartheta_1}$$

$$M_R = \frac{M}{\vartheta_1\left(\frac{1}{\vartheta_2} + \frac{1}{\vartheta_1}\right)}$$

$$M_R = \frac{M}{\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} + 1\right)}$$

$$\curvearrowright \quad p_{min} = \frac{3 \cdot M}{2\pi \mu b^3 \left(1 + \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)}$$

$$p_{min} = 14{,}47 \ N/cm^2$$

zu 4) Energieverlust

$$W_V = M_R \cdot (\varphi_1(t_K) - \varphi_2(t_K))$$

$$W_V = M_R \cdot \left(\left(\frac{M - M_R}{2 J_1} \cdot t_K^2 + \Omega_1 \cdot t_K \right) - \frac{M_R}{2 J_2} \cdot t_K^2 \right)$$

$$W_V = \frac{M_R}{2} \cdot \Omega_1 \cdot t_K$$

$$\underline{\underline{W_V = 4{,}437 \cdot 10^4 \, Nm}}$$

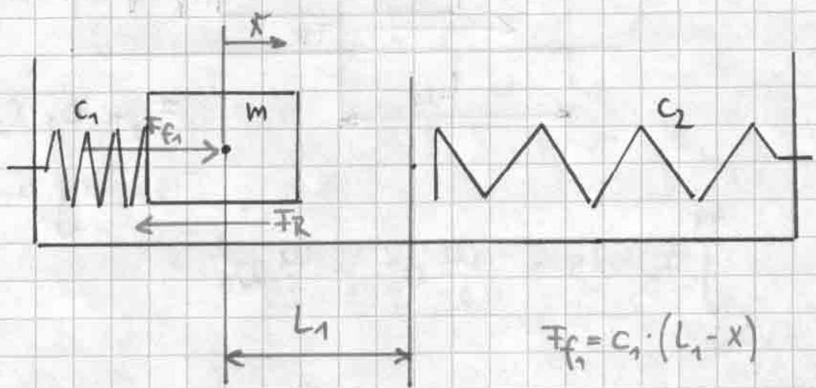
Aufg. 2.31 Masse zwischen Druckfedern

zu 1) v_1 der Masse, wenn beide Federn das erste Mal ohne Spannung sind

⇝ Weg - Geschwindigkeits - Zusammenhang

↳ Arbeitssatz

Skizze:



$F_{F_1} = c_1 \cdot (L_1 - x)$

$F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot m \cdot g$

$$\int_{s_0}^{s_1} F_s \, ds = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}$$

$$F_s = c_1 (L_1 - x) - \mu \cdot m \cdot g$$

$$v_0 = 0$$

$$s_0 = 0 \quad , \; s_1 = L_1$$

$$\rightsquigarrow \int_0^{L_1} \left(c_1 (L_1 - x) - \mu m g \right) dx = \frac{m v_1^2}{2}$$

$$c_1 \cdot L_1 \cdot x - \frac{1}{2} c_1 x^2 - \mu m g \cdot x \Big|_0^{L_1} = \frac{m v_1^2}{2}$$

$$c_1 L_1^2 - \frac{1}{2} c_1 L_1^2 - \mu m g L_1 = \frac{m v_1^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} c_1 L_1^2 - \mu m g L_1 = \frac{m}{2} v_1^2$$

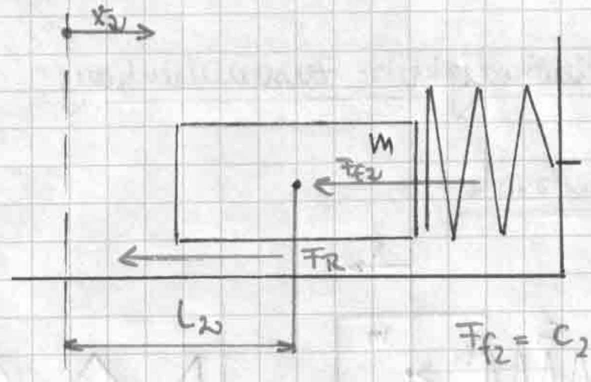
$$v_1 = \sqrt{\frac{c_1 L_1^2 - 2 \mu m g L_1}{m}} = \underline{\underline{0{,}897 \, \frac{m}{s}}}$$

zu 2) Maximale Zusammendrückung der Feder 2:

↝ Geschw.-Weg-Zusammenhang

↝ Arbeitsatz

Skizze:



$v_2 = 0$

$v_1 = 0{,}897\ \frac{m}{s}$

$F_{f2} = c_2 \cdot x_2$

$F_R = mg\mu$

$$\int_{s_0}^{s_1} F_S \, ds = \frac{m}{2} v_1^2 - \frac{m}{2} v_0^2$$

$$F_S = -c_2 x_2 - \mu m g$$

$$s_0 = 0$$

$$s_1 = L_2$$

$$v_1 = v_2 = 0$$

$$\curvearrowright \int_0^{L_2} -(c_2 x_2 - \mu m g)\,dx = -\frac{m}{2} v_0^2$$

$$\rightarrow \frac{c_2}{2} L_2^2 + \mu m g L_2 = \frac{m_2}{2} v_0^2$$

$$L_2^2 + \frac{2\mu m g L_2}{c_2} - \frac{m}{c_2} v_0^2 = 0$$

$$L_{1/2} \Rightarrow \underline{\underline{L_2 = 5{,}29\,cm}}$$

zu 3) Maximale Zusammendrückung L_2^* von c_2 unter Vernachlässigung der Reibung

$\rightsquigarrow$ Energiesatz: $U_0 + T_0 = U_1 + T_1$

$T_0 = 0 \qquad T_1 = 0$

$U_0 = \frac{c_1}{2} L_1^2 \qquad U_1 = \frac{c_2}{2} \cdot L_2^{*2}$

$$\curvearrowright \quad \frac{c_1}{2} \cdot L_1^2 = \frac{c_2}{2} \cdot L_2^{*2}$$

$$L_2^* = \sqrt{\frac{c_1}{c_2} \cdot L_1^2}$$

$$\underline{\underline{L_2^* = 6{,}32\,cm}}$$

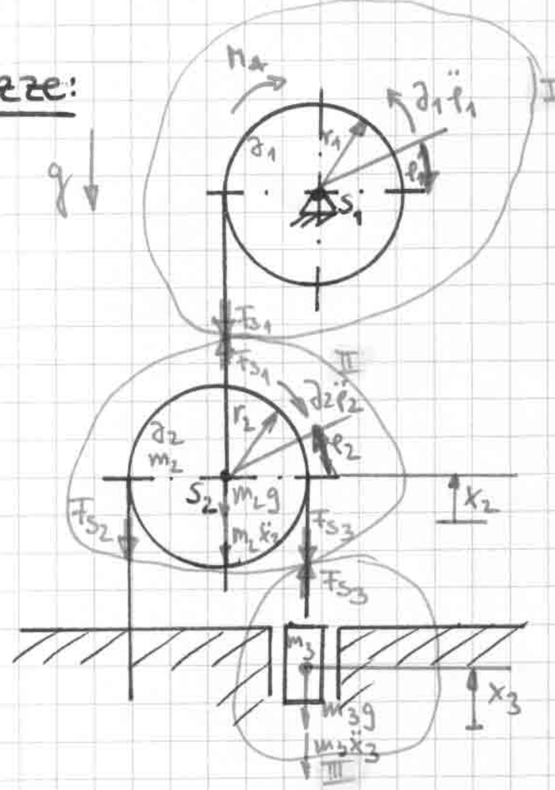
Aufg. 2.32 System nach d'Alembert

geg.: $r_1 = r_2 = r$, M_A ges.: 1) $M_{A\,min}$

$m_2 = m_3 = m$, g 2) $s = s(t)$ für m_3

$J_1 = J_2 = \frac{m}{2} r^2$ bei $M_A = 2 M_{A\,min}$ und Bewegung aus der Ruhe

Skizze:



freie Koordinaten: $\varphi_1, \varphi_2, x_2, x_3$

ZB: $x_2 = r_1 \varphi_1$

$x_2 = r_2 \varphi_2$

$x_3 = x_2 + r_2 \varphi_2 = 2 x_2$

$\curvearrowright$ Freiheitsgrad: $f = 1$

generalisierte Koordinate: $\underline{\underline{q_1 = x_3}}$

I: $\curvearrowleft S_1$: $J_1 \ddot{\varphi}_1 - M_A + F_{S_1} \cdot r = 0$

II: $\uparrow$: $F_{S_1} - F_{S_2} - F_{S_3} - m_2 g - m_2 \ddot{x}_2 = 0$

$\curvearrowright S_2$: $J_2 \ddot{\varphi}_2 + F_{S_3} \cdot r - F_{S_2} \cdot r = 0$

III: $\downarrow$: $m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g - F_{S_3} = 0$

○ ... zu ersetzende Koordinaten!

$x_3 = 2 x_2 = 2 r_1 \varphi_1 \quad \leadsto \quad \underline{\underline{\ddot{\varphi}_1 = \frac{\ddot{x}_3}{2 r_1}}} \qquad \leadsto \quad \underline{\underline{\ddot{x}_2 = \frac{\ddot{x}_3}{2}}}$

$x_3 = 2 r_2 \varphi_2 \quad \leadsto \quad \underline{\underline{\ddot{\varphi}_2 = \frac{\ddot{x}_3}{2 r_2}}}$

Einsetzen der Koordinaten:

$$J_1 \cdot \frac{\ddot{x}_3}{2r_1} - M_A + F_{S_1} \cdot r = 0$$

$$F_{S_1} - F_{S_2} - F_{S_3} - m_2 g - m_2 \cdot \frac{\ddot{x}_3}{2} = 0$$

$$J_2 \cdot \frac{\ddot{x}_3}{2r_2} + F_{S_3} \cdot r - F_{S_2} \cdot r = 0$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g - F_{S_3} = 0$$

Umstellen und schrittweises Ersetzen der Stabkräfte:

$$\underline{F_{S_3} = m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g}$$

$$F_{S_2} = \frac{J_2 \cdot \ddot{x}_3}{2r^2} + F_{S_3}$$

$$\underline{F_{S_2} = \frac{J_2 \ddot{x}_3}{2r^2} + m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g}$$

$$F_{S_1} = F_{S_2} + F_{S_3} + m_2 g + \frac{m_2 \cdot \ddot{x}_3}{2}$$

$$\underline{F_{S_1} = \frac{J_2 \ddot{x}_3}{2r^2} + m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g + m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g + m_2 g + \frac{m_2 \ddot{x}_3}{2}}$$

$$\rightsquigarrow -M_A + \frac{J_1 \ddot{x}_3}{2r} + \frac{J_2 \ddot{x}_3}{2r} + 2m_3 \ddot{x}_3 r + 2m_3 g r + m_2 g r + \frac{m_2 \ddot{x}_3}{2} \cdot r = 0$$

mit $m = m_2 = m_3$ und $J_1 = J_2 = \frac{m}{2} r^2$

$$-M_A + \frac{m r^{\cancel{2}}}{2 \cdot 2 \cancel{r}} \ddot{x}_3 + \frac{m r^{\cancel{2}}}{2 \cdot 2 \cancel{r}} \ddot{x}_3 + \frac{5}{2} m \ddot{x}_3 r + 3 m g r = 0$$

$$-M_A + \frac{1}{2} m \ddot{x}_3 r + \frac{5}{2} m \ddot{x}_3 r + 3mgr = 0$$

$$-M_A + 3m\ddot{x}_3 r + 3mgr = 0$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{M_A - 3mgr}{3mr}$$

$$\underline{\underline{\ddot{x}_3 = \frac{M_A}{3mr} - g}}$$

zu 1) Kleinstes Antriebsmoment $M_{A\,min}$

$\curvearrowright \ddot{x}_3 \overset{!}{=} 0$ (Halten der Masse m_3)

$$\rightsquigarrow \quad 0 = \frac{M_{A\,min}}{3mr} - g$$

$$\underline{\underline{M_{A\,min} = 3mgr}}$$

zu 2) Weg der Masse m_3

$$\ddot{s} = k \quad \rightsquigarrow \quad \dot{s} = k \cdot t + c_1 \quad \rightsquigarrow \quad s = \frac{k}{2} t^2 + c_1 t + c_2$$

für $t=0$: $\dot{s} = 0$, $s = 0$ $\quad \curvearrowright c_1 = c_2 = 0$

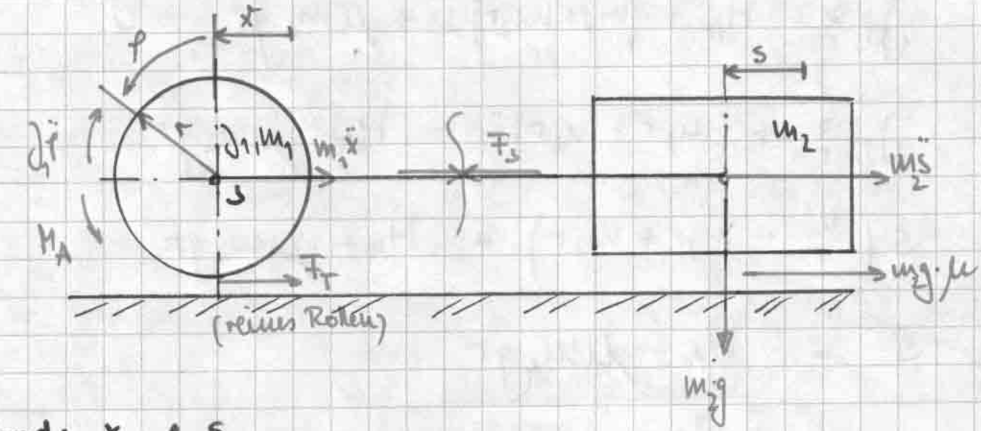
$\underline{\Rightarrow s = \frac{k}{2} t^2}$ mit $k = \dfrac{M_A}{3mr} - g$ und $M_A = 2M_{A\,min} = 6mgr$

$$\curvearrowright s = \frac{6mgr}{2 \cdot 3mr} \cdot t^2 - g \qquad ?$$

Aufg. 2.33.

ges.: Geschw. v_t des Systems nach $t^* = 2s$

Skizze:



freie Koord.: x, φ, s

ZB: $s = x$

$x = r \cdot \varphi$

Freiheitgrad: $f = 1$ → generalisierte Koord: $q = s$

Gleichgewichtsbedingungen

Masse 1: $\rightarrow: m_1 \ddot{x} + F_S + F_T = 0$

$\curvearrowleft S: J_1 \ddot{\varphi} - M_A - F_T \cdot r = 0$

Masse 2: $\rightarrow: m_2 \ddot{s} + m_2 g \mu - F_S = 0$

$\ddot{x} \Rightarrow s = x \curvearrowright \ddot{x} = \ddot{s}$

$\ddot{\varphi} \Rightarrow \varphi = \frac{x}{r} \curvearrowright \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r} = \frac{\ddot{s}}{r}$

↷ 1) $m_1 \cdot \ddot{s} + F_S + F_T = 0$

2) $J_1 \cdot \frac{\ddot{s}}{r} - M_A - F_T \cdot r = 0$

3) $m_2 \ddot{s} + \mu m_2 g - F_S = 3$

aus 3): $F_S = m_2 \ddot{s} + \mu m_2 g$ (4)

(4) in (1): $m_1 \ddot{s} + m_2 \ddot{s} + \mu m_2 g = - F_T$

$F_T = - m_1 \ddot{s} - m_2 \ddot{s} - \mu m_2 g$ (5)

(5) in (2):

$$J_1 \frac{\ddot{s}}{r} - M_A - \left(-m_1\ddot{s} - m_2\ddot{s} - \mu m_2 g\right) \cdot r = 0$$

$$J_1 \frac{\ddot{s}}{r} - M_A + (m_1 r + m_2 r)\ddot{s} + \mu m_2 g r = 0$$

$$J_1 \frac{\ddot{s}}{r} + (m_1 r + m_2 r)\ddot{s} = M_A - \mu m_2 g r$$

$$\ddot{s}\left(\frac{J_1}{r} + m_1 r + m_2 r\right) = M_A - \mu m_2 g r$$

$$\ddot{s} = \frac{M_A - \mu m_2 g r}{\frac{J_1}{r} + m_1 r + m_2 r}$$

$$\ddot{s} = k = 1\,m/s^2$$

⇝ Integration:

$$\dot{s} = k \cdot t + c_1 \qquad \text{AB: } t = 0;\ s = 0;\ \dot{s} = v_0$$

$$\curvearrowright c_1 = v_0$$

$$\Rightarrow \dot{s} = k \cdot t + v_0$$

$$\dot{s} = v_t = k \cdot t^* + v_0$$

$$v_t = 1\frac{m}{s^2} \cdot 2s + 2\frac{m}{s}$$

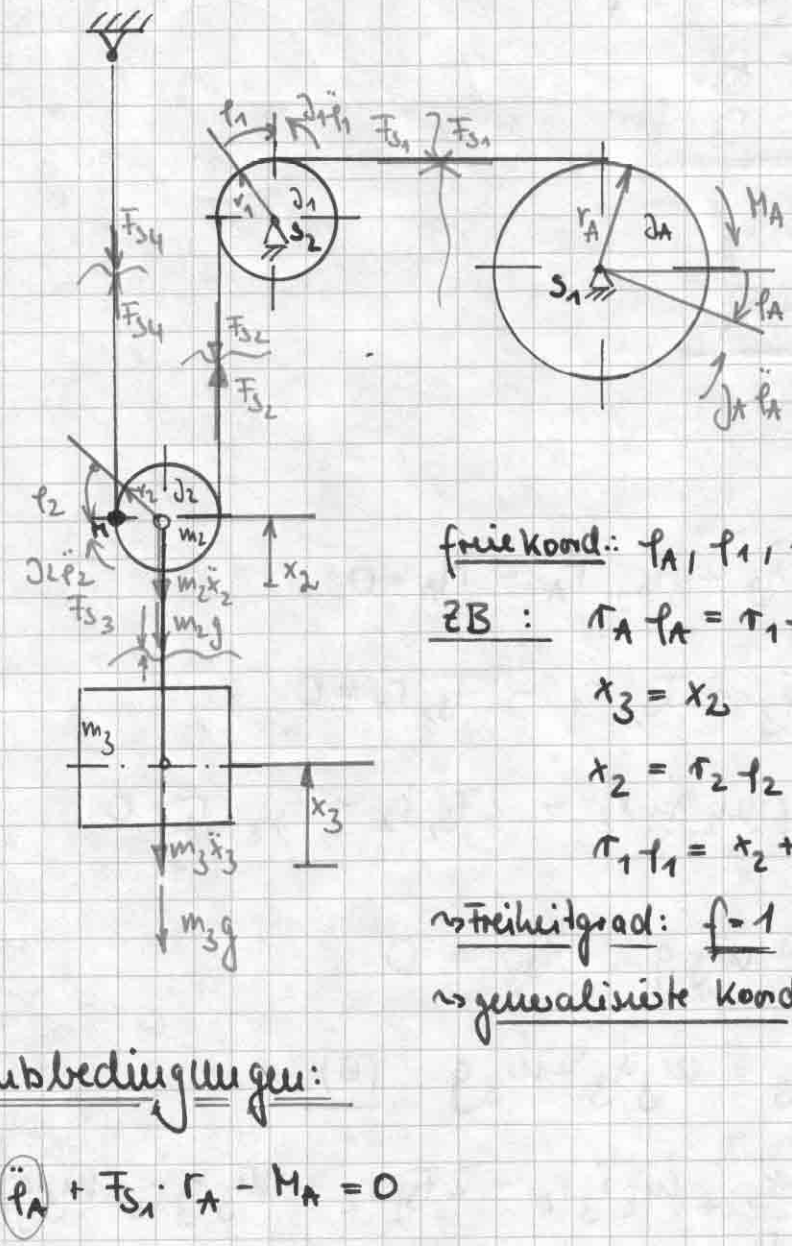
$$v_t = 4\frac{m}{s}$$

Aufg. 2.34

geg.: $M_A, J_A, r_A, J_1, r_1, J_2, r_2, m_2, m_3, g$

ges.: $\ddot{x}_3$ von m_3

Skizze:



freie Koord.: $\varphi_A, \varphi_1, \varphi_2, x_2, x_3$

ZB: $r_A\varphi_A = r_1\varphi_1$

$x_3 = x_2$

$x_2 = r_2\varphi_2$

$r_1\varphi_1 = x_2 + r_2\varphi_2 = 2x_2$

⇝ Freiheitgrad: $f = 1$

⇝ generalisierte Koord.: $q = x_3$

Gleichgewichtsbedingungen:

$\curvearrowleft S_1: J_A\ddot{\varphi}_A + F_{S1}\cdot r_A - M_A = 0$

$\curvearrowleft S_2: J_1\ddot{\varphi}_1 + F_{S2}\cdot r_1 - F_{S1}\cdot r_1 = 0$

$\curvearrowleft M: J_2\ddot{\varphi}_2 + m_2\ddot{x}_2\cdot r_2 + m_2 g r_2 - F_{S2}\cdot 2r_2 \cancel{=0} + F_{S3}\cdot r_2 = 0$

$\downarrow: m_3\ddot{x}_3 + m_3 g - F_{S3} = 0$

$\leadsto \ddot{\varphi}_A \Rightarrow \varphi_A = \frac{r_1\varphi_1}{r_A} = \frac{2x_2}{r_A} = \frac{2x_3}{r_A}$

$\ddot{\varphi}_A = \frac{2}{r_A}\cdot\ddot{x}_3$

$\rightsquigarrow \ddot{\varphi}_1 \Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{2x_2}{r_1} = \frac{2x_3}{r_1}$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2}{r_1} \cdot \ddot{x}_3$$

$\rightsquigarrow \ddot{\varphi}_2 \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{x_2}{r_2} = \frac{x_3}{r_3}$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\ddot{x}_3}{r_3}$$

$\rightsquigarrow \ddot{x}_2 \Rightarrow \quad x_2 = x_3$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_3$$

Einsetzen:

(1) $J_A \cdot \frac{2}{r_A} \cdot \ddot{x}_3 + F_{S_1} \cdot r_A - M_A = 0$

(2) $J_1 \cdot \frac{2}{r_1} \ddot{x}_3 + F_{S_2} r_1 - F_{S_1} r_1 = 0$

(3) $J_2 \cdot \frac{\ddot{x}_3}{r_3} + m_2 \ddot{x}_3 r_2 - 2F_{S_2} r_2 + F_{S_3} \cdot r_2 = 0$

(4) $m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g - F_{S_3} = 0$

(aus 4): $F_{S_3} = m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g$ (5)

(5 in 3) $J_2 \cdot \frac{\ddot{x}_3}{r_3} + m_2 \ddot{x}_3 r_2 - 2F_{S_2} r_2 + m_3 \ddot{x}_3 r_2 + m_3 g r_2 = 0$

$$F_{S_2} = \frac{J_2 \frac{\ddot{x}_3}{r_3} + m_2 \ddot{x}_3 r_2 + m_3 \ddot{x}_3 r_2 + m_3 g r_2}{2 r_2} \qquad (6)$$

⋮

Aufg. 2.23 Förderband

geg.: $n = 60\,\text{min}^{-1}$ $\quad g = 10\,\text{m/s}^2$

$R = 0{,}5$ $\quad r = 2\,\text{cm}$

$m = 1\,\text{kg}$ $\quad \mu = 0{,}1$

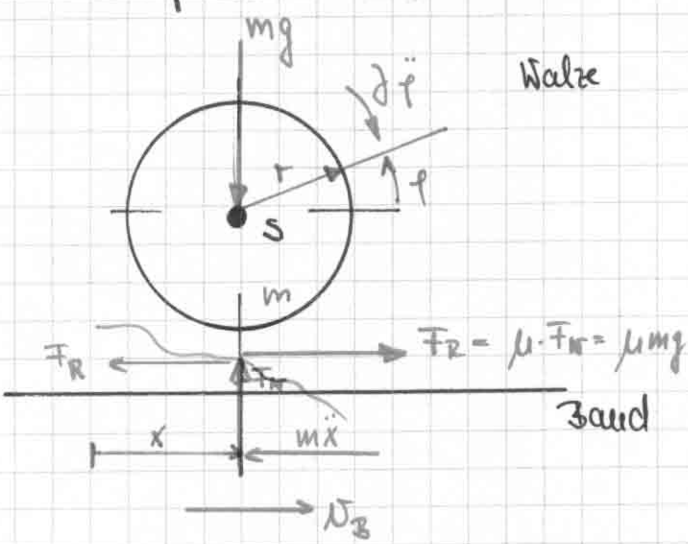
ges.: 1) Bewegungsgleichung d. Walze

2) nach welcher Zeit T rollt die Walze

3) zeitliche Verläufe der Geschwindigkeiten und Wege von Band und Walze

Lsg. mit Prinzip von d'Alembert

Skizze:



freie Koordinaten: x, φ

ZB : –

Freiheitsgrad : $f = 2$

Band: $\leftarrow$: $m\ddot{x} + F_R = 0$

Walze: $S \curvearrowleft$: $J\ddot{\varphi} - F_R \cdot r = 0$

$\leftarrow$: $m\ddot{x} - F_R = 0$

mit $F_R = F_N \cdot \mu = mg\mu$ $\rightarrow$ für Walze:

$$J\ddot{\varphi} - mg\mu r = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{mg\mu r}{J}$$

$$m\ddot{x} - mg\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = g \cdot \mu$$

⇝ Translation der Walze während des Gleitens:

$$\dot{x} = g \cdot \mu \cdot t$$

⇝ Rotation der Walze während des Gleitens:

$$\dot{\varphi} = \frac{mg \cdot \mu r}{J} \cdot t$$

⇝ Bandgeschwindigkeit v_B:

$$v_B = R \cdot \Omega = R \cdot 2\pi n$$

$$v_B \left[\frac{m}{s}\right] = \frac{R \cdot \pi n}{30}$$

⇝ Relativgeschwindigkeit

$$v_{rel} = v_B - (\dot{x} + r\dot{\varphi})$$

$$v_{rel} = v_B - \left(g\mu t + \frac{r^2 mg\mu}{J} \cdot t\right)$$

$$v_{rel} = \frac{R \cdot \pi \cdot n}{30} - t\left(g\mu + \frac{r^2 mg\mu}{J}\right)$$

bei reinem Rollen: $v_{rel} = 0$ ↷

$$0 = \frac{R\pi n}{30} - T\left(g\mu + \frac{r^2 mg\mu}{J}\right)$$

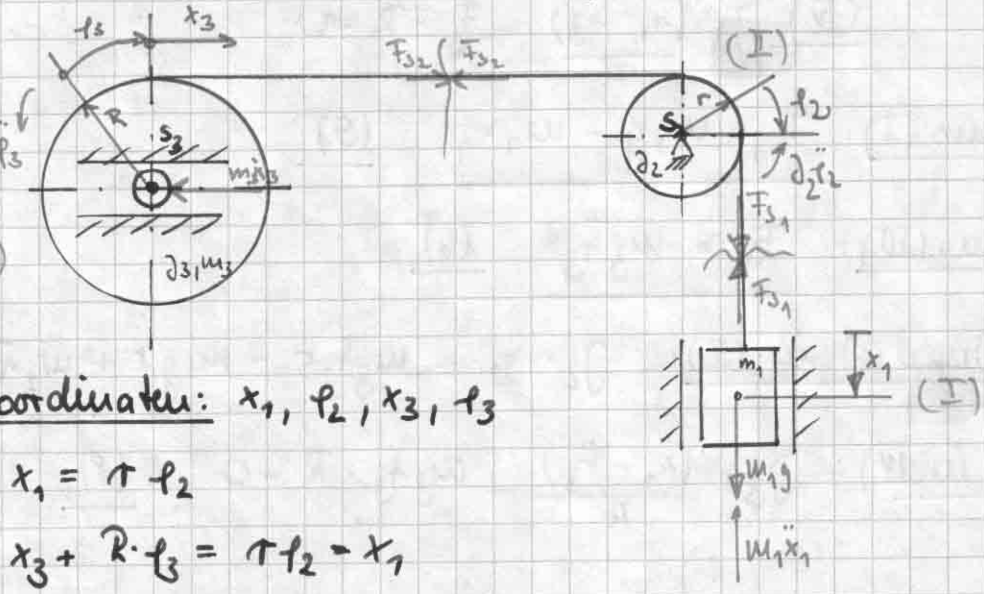
$$T = \frac{R\pi n}{30 \cdot \left(g\mu + \frac{r^2 mg\mu}{J}\right)}$$

Aufg. 2.39.

geg.: $m_1, J_2, r, m_3, J_3, R, g$

ges.: Bewegung von m_1, für $t=0$ Bewegung aus der Ruhe

Skizze:



freie Koordinaten: $x_1, \varphi_2, x_3, \varphi_3$

ZB: $x_1 = r\varphi_2$

$x_3 + R\cdot\varphi_3 = r\varphi_2 = x_1$

Freiheitsgrad: $f = 2$

generalisierte Kord: $\underline{\underline{q_1 = x_1}}$; $\underline{\underline{x_3 = q_2}}$

Gleichgewichtsbedingungen:

(I): $\uparrow$: $m_1\ddot{x}_1 + F_{S_1} - m_1 g = 0$

(II): $\curvearrowleft S_2$: $J_2\ddot{\varphi}_2 + F_{S_2}\cdot r - F_{S_1}\cdot r = 0$

(III): $\leftarrow$: $m_3\ddot{x}_3 - F_{S_2} = 0$

$\curvearrowleft S_3$: $J_3\ddot{\varphi}_3 - F_{S_2}\cdot R = 0$

$\rightsquigarrow \ddot{\varphi}_2 \Rightarrow x_1 = r\varphi_2 \curvearrowright \varphi_2 = \frac{x_1}{r}$

$$\underline{\underline{\ddot{\varphi}_2 = \frac{\ddot{x}_1}{r}}}$$

$\rightsquigarrow \ddot{\varphi}_3 \Rightarrow x_3 + R\cdot\varphi_3 = x_1 \curvearrowright \varphi_3 = \frac{x_1 - x_3}{R}$

$$\underline{\underline{\ddot{\varphi}_3 = \frac{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3}{R}}}$$

Einsetzen: (I) $m_1\ddot{x}_1 + F_{S_1} - m_1 g = 0$

(II) $J_2 \dfrac{\ddot{x}_1}{r} + F_{S_2}\cdot r - F_{S_1}\cdot r = 0$

(III) $m_3\ddot{x}_3 - F_{S_2} = 0$

(IV) $J_3 \dfrac{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3)}{R} - F_{S_2}\cdot R = 0$

aus (I): $F_{S_1} = m_1 g - m_1\ddot{x}_1$ (5)

aus (III): $F_{S_2} = m_3\ddot{x}_3$ (6)

(5) und (6) in (II): $J_2\cdot\dfrac{\ddot{x}_1}{r} + m_3\ddot{x}_3 r - m_1 g r + m_1\ddot{x}_1 r = 0$ (7)

(6) in (IV): $J_3\cdot\dfrac{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3)}{R} - m_3\ddot{x}_3\cdot R = 0$ (8)

aus (7): $J_2\cdot\dfrac{\ddot{x}_1}{r^2} + m_3\ddot{x}_3 - m_1 g + m_1\ddot{x}_1 = 0$

$m_3\ddot{x}_3 = m_1 g - m_1\ddot{x}_1 - J_2\cdot\dfrac{\ddot{x}_1}{r^2}$ (9)

aus (8): $J_3\cdot\dfrac{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3)}{R^2} - m_3\ddot{x}_3 = 0$

$m_3\ddot{x}_3 = J_3\cdot\dfrac{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3)}{R^2}$ (10)

(9) $\doteq$ (10) $J_3\cdot\dfrac{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3)}{R^2} = m_1 g - m_1\ddot{x}_1 - J_2\dfrac{\ddot{x}_1}{r^2}$

$$J_3\cdot(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3) = \left(m_1 g - m_1\ddot{x}_1 - J_2\cdot\frac{\ddot{x}_1}{r^2}\right)R^2$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3 = \frac{\left(m_1 g - m_1\ddot{x}_1 - J_2\cdot\frac{\ddot{x}_1}{r^2}\right)\cdot R^2}{J_3}$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{\left(m_1\ddot{x}_1 - m_1 g + J_2\frac{\ddot{x}_1}{r^2}\right)\cdot R^2}{J_3} + \ddot{x}_1$$

⋮

Aufg. 2.40.

geg.: $m = 1\,kg$, $R = 2\,cm$, $r = 1\,cm$, $J_S = 5\,kgcm^2$, $c = 9\,N/cm$

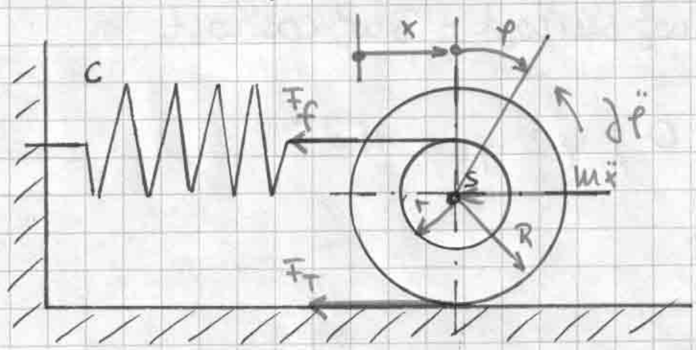
AB: $t = 0$, $\varphi = 0$, $\dot\varphi = \dot\varphi_0 = 15\,s^{-1}$

ges.: 1) Bewegungsgleichung

2) ω_0

3) $|\hat{x}_{max}|$ des Schwerpunktes

Skizze im ausgelenkten Zustand:



freie Koord: x, φ

ZB: $x = R\cdot\varphi$

$\rightsquigarrow \underline{\underline{f = 1}}$

$\underline{\underline{q = \varphi}}$

$$F_f = c\cdot(x + r\varphi)$$

∑W: $\leftarrow: \; m\ddot{x} + c(x + r\varphi) + F_T = 0$

$\curvearrowleft S: \; J\ddot\varphi + c\cdot(x + r\varphi)\cdot r - F_T\cdot R = 0$

$$\rightsquigarrow \; \underline{\ddot{x} = R\cdot\ddot\varphi}\;,\; \underline{x = R\cdot\varphi}$$

$$\curvearrowright \quad mR\ddot\varphi + c(R\varphi + r\varphi) + F_T = 0 \qquad \underline{(1)}$$

$$J\ddot\varphi + c(R\varphi + r\varphi)r - F_T\cdot R = 0 \qquad \underline{(2)}$$

(1) nach F_T: $\quad F_T = -mR\ddot\varphi - c(R\varphi + r\varphi) \qquad \underline{(3)}$

(3) in (2): $\quad J\ddot\varphi + cRr\varphi + cr^2\varphi + mR^2\ddot\varphi + cR^2\varphi + cRr\varphi = 0$

$$\ddot\varphi(J + mR^2) + \varphi\cdot(cRr + cr^2 + cR^2 + cRr) = 0$$

$$\underline{\underline{\ddot\varphi + \frac{(cR^2 + cr^2 + 2cRr)}{(J + mR^2)} = 0}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{cR^2 + cr^2 + 2cRr}{mR^2 + J_S}}$$

$$\underline{\underline{\omega_0 = 30\,s^{-1}}}$$

$\rightsquigarrow$ harmonische Schwingung:

Ansatz: $\varphi = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 A \cos \omega_0 t + (-\omega_0 B \sin \omega_0 t)$$

$$\ddot{\varphi} = -A\omega_0^2 \sin \omega_0 t - B\omega_0^2 \cos \omega_0 t$$

AB: $t = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 15\,s^{-1}$

$\rightsquigarrow$ $\varphi = 0 = B$

$$\underline{B = 0}$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = A \cdot \omega_0$$

$$\underline{\underline{A = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 \cdot t}}$$

da $\varphi = \frac{x}{R}$ $\rightsquigarrow$ $x = \varphi \cdot R$

$$\Rightarrow x(t) = R \cdot \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\underline{\hat{x}_{max} = R \cdot \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}}$$

$$\underline{\underline{|\hat{x}_{max}| = 1\,cm}}$$

Aufg. 2.25. geneigte Ebene

geg.: $m = 1kg$, $\mu = 0{,}1$, $\alpha = 30°$, $g = 9{,}81\,m/s^2$, $v_0 = 2\,m/s$

ges.: 1) t_u

2) $x(t_u)$

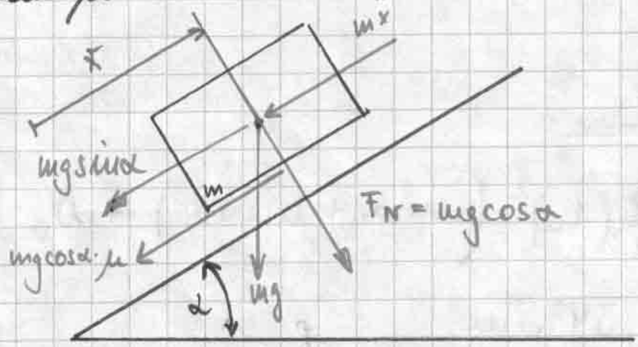
3) t^*

4) $v(t)^*$

5) Vgl. mit $\mu = 0$

Skizze:

Aufwärts: v_0



$\swarrow$: $m\ddot{x} + mg\sin\alpha + mg \cdot \mu \cdot \cos\alpha = 0$

$\nwarrow$: $F_N = mg\cos\alpha$

$\rightsquigarrow$ $\ddot{x} = -g \cdot (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$

Integration: AB: $t = 0$; $x = 0$; $\dot{x} = v_0$

$$\dot{x} = -g \cdot (\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \cdot t + c_1$$

$$c_1 = v_0$$

$$\rightsquigarrow \dot{x} = -g \cdot (\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \cdot t + v_0$$

$$x = -\frac{g}{2} \cdot t^2 (\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + v_0 \cdot t + c_2$$

$$c_2 = 0$$

$$\rightsquigarrow x = -\frac{g}{2} \cdot t^2 (\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + v_0 \cdot t$$

⤳ an Umkehrstelle gilt: $v = \dot{x} = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\cdot t + v_0$$

$$t_u = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

$$\underline{\underline{t_u = 0{,}3475\ \text{s}}}$$

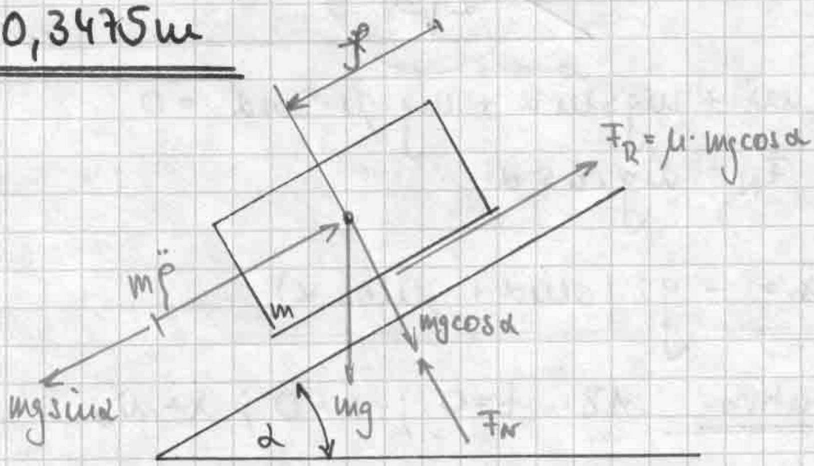
⤳ $x(t_u)$:

$$x(t_u) = -\frac{g}{2}(t_u)^2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + v_0\cdot t_u$$

$$\underline{\underline{x(t_u) = 0{,}3475\,\text{m}}}$$

Skizze:

Abwärts:



GGW: $\nearrow$: $m\ddot{\xi} + \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0$

$\nwarrow$: $mg\cos\alpha = F_N$

$\Rightarrow$ Bew-glg.: $\ddot{\xi} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

Integration: AB: $t = t_u$; $\dot{s} = \dot{\xi} = 0$; $\xi = 0$

$$\dot{\xi} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot t + K_1$$

$$⤳ \underline{K_1 = -g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot t_u}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{\xi} = g\cdot(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot t + g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\cdot t_u}}$$

$$\dot{\jmath} = \frac{g}{2} \cdot (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \cdot t^2 + g \cdot (\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \cdot t_u \cdot t + k_2$$

$$k_2 = \frac{g}{2} (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\, t_u^2$$

$$\rightsquigarrow \jmath = \frac{g}{2} \cdot (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \cdot t^2 + g \cdot (\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \cdot t_u \cdot t + \frac{g}{2} (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Es gilt: $\jmath(t^*) = x(t_u)$

$$\rightsquigarrow x(t_u) = \frac{g}{2} \cdot (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \cdot (t^* - t_u)^2$$

$$\sqrt{\frac{2\, x(t_u)}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} + t_u = t^*$$

$$t^* = 0{,}7616\,s$$

$\rightsquigarrow v(t^*) = \dot{\jmath}(t^*)$

$$\dot{\jmath}(t^*) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(t^* - t_u)$$

$$\dot{\jmath}(t^*) = 1{,}6793\ m/s$$

$\rightsquigarrow$ Vgl. mit $\mu = 0$:

alle Berechnungen ohne $F_R = \mu m g \cos\alpha$

kürzerer = besserer Weg ←

Aufwärts: Zeit (t) - Geschw. (v) - Beziehung

⇝ Impulssatz

$$\int_{t_0}^{t_1} F_S \, dt = (mv)_1 - (mv)_0$$

$$F_S = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$v_1 = 0$$

$$-\int_0^{t_u} mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = -mv_0$$

$$t_u = \frac{mv_0}{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha}$$

$$t_u = \frac{v_0}{g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha}$$

Aufwärts: Weg (s) - Geschw. (v) - Beziehung

⇝ Arbeitssatz

$$\int_{s_0}^{s_1} F_S \, ds = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$F_S = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$v_1 = 0$$

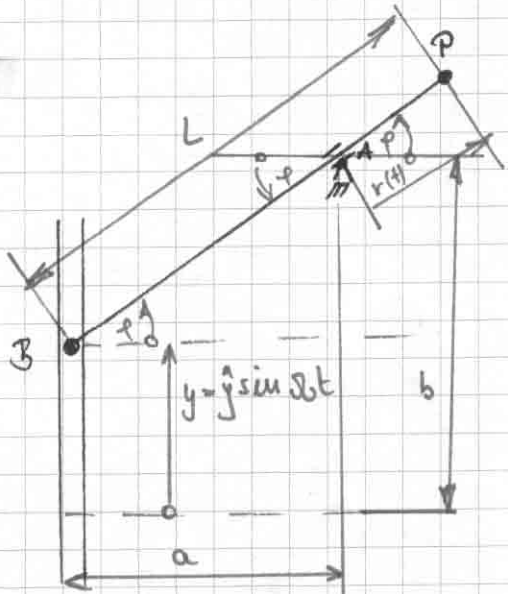
$$-\int_0^{x(t_u)} mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = -\frac{mv_0^2}{2}$$

$$x(t_u) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

PV Heft 1

Aufg. 5.1.

Skizze:



a) Pythagoras: $(L-r)^2 = a^2 + (b-y)^2$

$$(L-r) = \sqrt{a^2 + (b-y)^2}$$

$$r = L - \sqrt{a^2 + (b-y)^2}$$

mit $r = r(t)$ und $y = \hat{y} \sin \Omega t$

$$\underline{\underline{r(t) = L - \sqrt{a^2 + (b - \hat{y} \sin \Omega t)^2}}}$$

Tangens: $\tan \varphi = \dfrac{b-y}{a}$ mit $y = \hat{y} \sin \Omega t$

$$\underline{\underline{\varphi = \arctan\left(\frac{b - \hat{y} \sin \Omega t}{a}\right)}}$$

b) $v_r(t) = \dot{r}(t) = -\frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + \left(b - \hat{y} \sin \Omega t\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\hat{y}\, \Omega \cos \Omega t)$

$$\underline{\underline{= + \frac{\hat{y}\, \Omega \cos \Omega t}{2 \cdot \sqrt{a^2 + (b - \hat{y} \sin \Omega t)}}}}$$

f (² vergessen!)

⋮

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Heft 1

Aufg. 5.3.

geg.: m_1, m_2, c, s ges.: v_1

Lsg.: $m_1 v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v$

$$\frac{m_1 + m_2}{2} \cdot v^2 = \frac{c}{2} \cdot s^2$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{c}{(m_1 + m_2)} \cdot s^2}$$

$v_2 = 0$ (vor Stoß!)

$$\rightarrow m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v$$

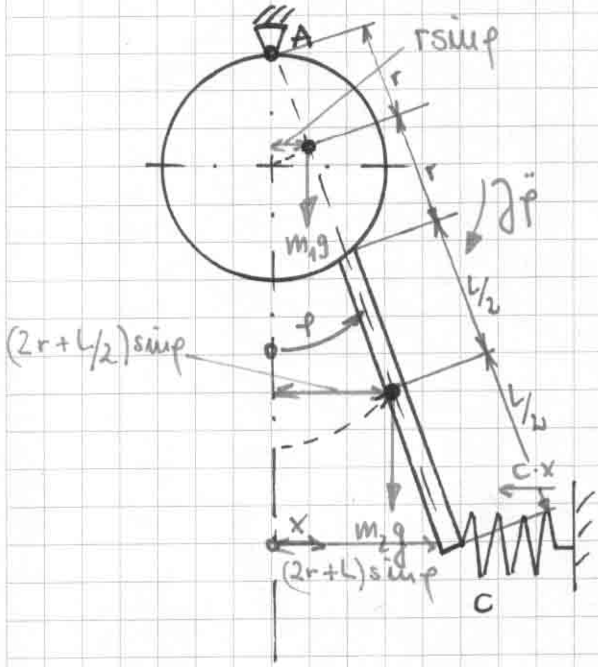
$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \sqrt{\frac{c}{(m_1 + m_2)} \cdot s^2}$$

$$m_1 \cdot v_1 = \sqrt{(m_1 + m_2) \cdot c \cdot s^2}$$

$$\underline{\underline{v_1 = \frac{s}{m_1} \cdot \sqrt{(m_1 + m_2) \cdot c}}}$$

Aufg. 5.4.

Skizze im ausgelenkten Zustand:



$x = (2r+L)\sin\varphi$

⇝ Massenträgheitsmoment um A:

Scheibe: $J_1 = \dfrac{m_1 r^2}{2} + m_1 \cdot r^2$

$J_1 = \dfrac{3}{2} m_1 r^2$

$\underline{\underline{J_1 = 9{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\,\text{m}^2}}$

dünner Stab: $J_2 = \dfrac{m_2 \cdot L^2}{12} + m_2 \cdot \left(2r + \dfrac{L}{2}\right)^2$

$\underline{J_2 = 0{,}0448\ \text{kg}\,\text{m}^2}$

⇝ $J = J_1 + J_2$

$\underline{\underline{J = 0{,}0544\ \text{kg}\,\text{m}^2 = 544\ \text{kg}\,\text{cm}^2}}$

↝ Bewegungsgleichung:

$$0 = J\ddot{\varphi} + m_1 \cdot g \cdot r \sin\varphi + m_2 g \cdot \left(2r + \frac{L}{2}\right) \cdot \sin\varphi + c \cdot (2r+L) \sin\varphi \cdot (2r+L)$$

$$0 = J\ddot{\varphi} + m_1 g r \sin\varphi + m_2 g \left(2r + \frac{L}{2}\right) \sin\varphi + c\,(2r+L)^2 \sin\varphi$$

für kleine φ: $\sin\varphi \approx \varphi$

$$0 = J\ddot{\varphi} + m_1 g r \varphi + m_2 g \left(2r + \frac{L}{2}\right) \cdot \varphi + c\,(2r+L^{\cancel{2}})^2 \cdot \varphi$$

$$0 = J\ddot{\varphi} + \left(m_1 g r + m_2 g \left(2r + \frac{L}{2}\right) + c(2r+L)^2\right) \cdot \varphi$$

$$0 = \ddot{\varphi} + \frac{g\left(m_1 r + m_2 \left(2r + \frac{L}{2}\right)\right) + c(2r+L)^2}{J} \cdot \varphi$$

↝ Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cdot \left(m_1 \cdot r + m_2 \cdot \left(2r + \frac{L}{2}\right)\right) + c \cdot (2r+L)^2}{\frac{3}{2} m_1 r^2 + \frac{m_2}{2} L^2 + m_2 \cdot \left(2r + \frac{L}{2}\right)^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{137716 \text{ cm}^2 \text{ kg}}{544 \text{ kg cm}^2 \text{ s}^2}}$$

$$\underline{\underline{\omega_0 = 15{,}91 \text{ s}^{-1}}}$$

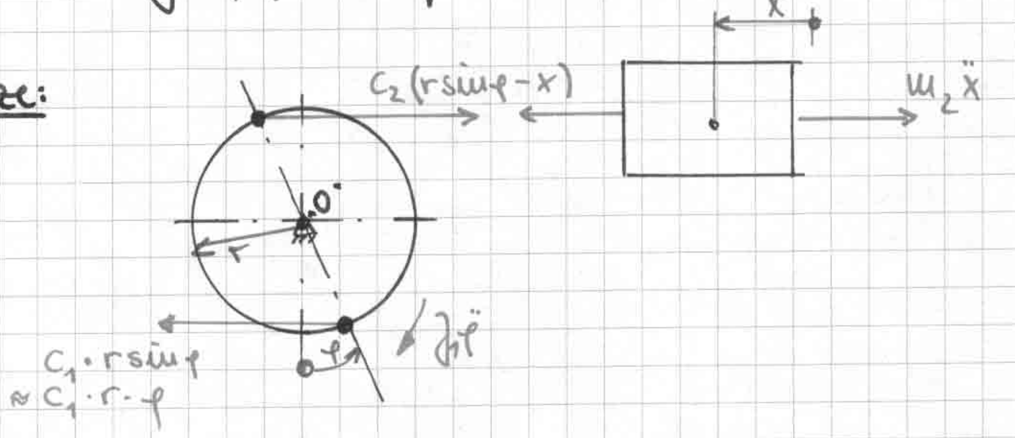
Aufg. 5.7.

→ Freiheitsgrad: $f = 2$

→ generalisierte Koordinaten: $q_1 = \varphi$; $q_2 = x$

↳ 2 Schwingungsgleichungen notwendig!

Skizze:



$$0: \; J_1\ddot{\varphi} + c_1 \cdot r^2 \cdot \varphi + c_2(r\sin\varphi - x) \cdot r = 0$$

$$\rightarrow: \; m_2\ddot{x} - c_2(r\sin\varphi - x) = 0$$

mit $\sin\varphi \approx \varphi$ (für kleine φ):

$$J_1\ddot{\varphi} + c_1 r^2 \varphi + c_2(r\varphi - x) \cdot r = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2(r\varphi - x) = 0$$