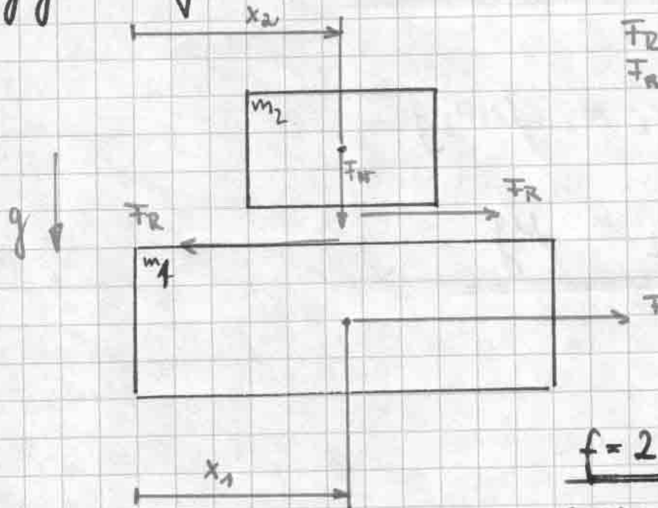
Aufg. 2.1. nach Lagrange

geg.: m_1, m_2, F, g, μ

ges.: Bewegungsgleichungen

Skizze:



$F_R = \mu \cdot F_N$

$F_R = \mu \cdot m_2 \cdot g$

$\underline{f = 2}$

$\rightsquigarrow$ 2 Gleichungen !

$$T = T_1 + T_2$$

$$T = \frac{m_1}{2} \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \cdot \dot{x}_2^2$$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$: $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \cdot \dot{x}_1$ $\qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \cdot \dot{x}_2$

$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)^{\bullet}$: $\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)^{\bullet} = m_1 \cdot \ddot{x}_1$ $\qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)^{\bullet} = m_2 \ddot{x}_2$

$\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)$: $\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$ $\qquad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$

$\rightsquigarrow$ $Q_1 = m_1 \ddot{x}_1$ $\qquad Q_2 = m_2 \ddot{x}_2$

∂W : $\partial W = \underbrace{(F - \mu m_2 g)}_{Q_1} \partial x_1 + \underbrace{(\mu m_2 g)}_{Q_2} \partial x_2$

Q_1: $m_1 \ddot{x}_1 = F - \mu m_2 g$

$$\ddot{x}_1 = \frac{F - \mu m_2 g}{m_1}$$

Q_2: $m_2 \ddot{x}_2 = \mu m_2 g$

$$\ddot{x}_2 = \mu g$$

Aufg. 2.2. Zylinder + Masse auf geneigter Ebene

geg.: $m_1, m_2, r, \mu_1, \mu_2, \alpha, g$

ges.: Beschleunigung des Systems und Stabkraft F_S

für 1) reines Rollen des Zylinders

2) Rollen und Gleiten des Zylinders

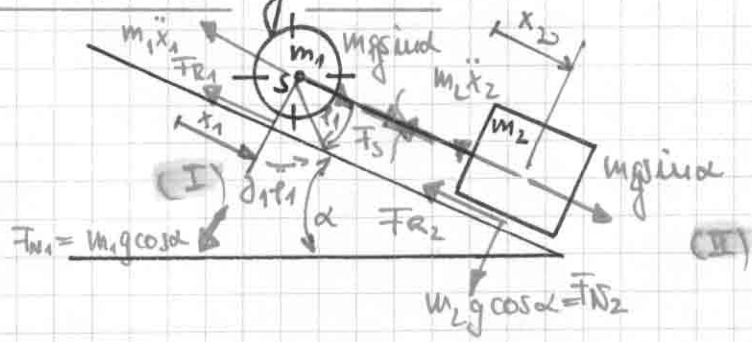
nach a) D'Alembert

b) Lagrange Gleichung II. Art

a) nach D'Alembert

1) reines Rollen des Zylinders

Skizze:



freie Koordinaten: x_1, φ_1, x_2

Zwangsbedingungen: $x_1 = r\varphi_1$

$x_1 = x_2$

Freiheitsgrad: $f = 1$

generalisierte Koordinate: $q_1 = x_1$

Gleichgewicht: (I) $\nwarrow$: $m_1\ddot{x}_1 + F_{R1} - m_1 g \sin\alpha - F_S = 0$

$\curvearrowleft S$: $J_1\ddot{\varphi}_1 - F_{R1}\cdot r = 0$

(II) $\nwarrow$: $m_2\ddot{x}_2 - m_2 g \sin\alpha + F_{R2} + F_S = 0$

$\nearrow$: $m_2 g \cos\alpha = F_{N2}$

$$\underline{F_{R_2} = \mu \cdot F_{N_2} = \mu \cdot m_2 g \cos\alpha}$$

$$\underline{\underline{\ddot{\varphi}_1 = \frac{\ddot{x}_1}{r}}} \quad ; \quad \underline{\underline{\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1}}$$

$$\rightsquigarrow \quad m_1 \ddot{x}_1 + F_{R_1} - m_1 g \sin\alpha - F_S = 0$$

$$J_1 \cdot \frac{\ddot{x}_1}{r} - F_{R_1} \cdot r = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_1 - m_2 g \sin\alpha + \mu m_2 g \cos\alpha + F_S = 0$$

$$m_2 g \cos\alpha = F_{N_2}$$

mit $J_1 = \frac{m_1}{2} r^2$: $\quad \frac{m_1}{2} r^2 \frac{\ddot{x}_1}{\cancel{r}} - F_{R_1} \cdot r = 0$

$$\underline{F_{R_1} = \frac{m_1}{2} \ddot{x}_1}$$

$$\underline{F_S = m_1 \ddot{x}_1 + \frac{m_1}{2} \ddot{x}_1 - m_1 g \sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad m_2 \ddot{x}_1 - m_2 g \sin\alpha + \mu m_2 g \cos\alpha + m_1 \ddot{x}_1 + \frac{m_1}{2} \ddot{x}_1 - m_1 g \sin\alpha = 0$$

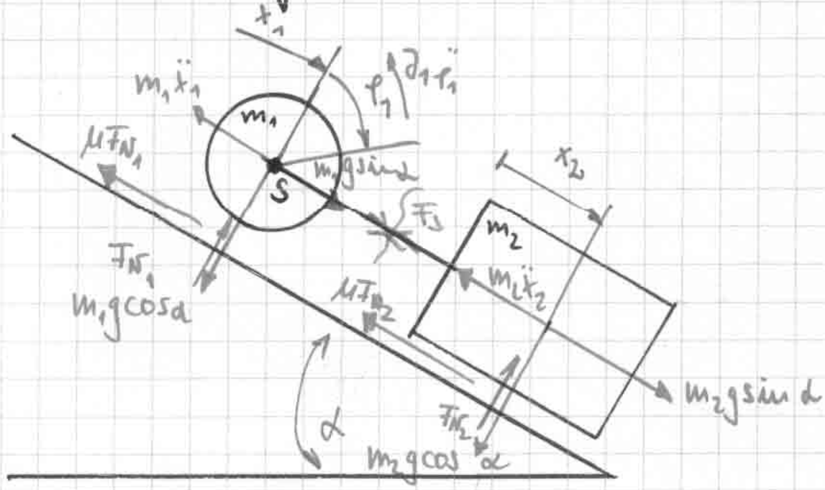
$$\ddot{x}_1 \left(m_2 + \frac{3}{2} m_1 \right) = (m_1 + m_2) \cdot g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha$$

$$\underline{\underline{\ddot{x}_1 = \frac{(m_1 + m_2) g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha}{\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right)}}}$$

$$\underline{\underline{F_S = m_2 g \sin\alpha - m_2 \ddot{x}_1 - \mu m_2 g \cos\alpha}}$$

2) Rollen und Gleiten des Zylinders

Skizze:



freie Koordinaten: x_1, φ_1, x_2

Zwangsbedingung: $x_1 = x_2$

Freiheitsgrad : $f = 2$

generalisierte Koordinaten: $q_1 = x_1$, $q_2 = \varphi_1$

Gleichgewicht:

Masse 1: $\nwarrow: m_1\ddot{x}_1 + \mu_1 F_{N1} - m_1 g\sin\alpha - F_S = 0$

$\nearrow: F_{N1} = m_1 g\cos\alpha$

$\circlearrowleft S: J_1\ddot{\varphi}_1 - \mu_1 F_{N1}\cdot r = 0$

Masse 2: $\nwarrow: m_2\ddot{x}_2 + \mu_2 F_{N_2} - m_2 g\sin\alpha + F_S = 0$

$\nearrow: F_{N_2} = m_2 g\cos\alpha$

mit $J_1 = \frac{m_1}{2} r^2$ und $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$:

(1) $m_1\ddot{x}_1 + \mu_1 m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha - F_S = 0$

(2) $\frac{m_1}{2} r^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 - \mu_1 \cdot m_1 g\cos\alpha \cdot r = 0$

(3) $m_2\ddot{x}_1 + \mu_2 m_2 g\cos\alpha - m_2 g\sin\alpha + F_S = 0$

aus (2): $\ddot{\varphi}_1 = \frac{2\mu_1 \cancel{m_1} g \cos\alpha \cancel{\cdot r}}{\cancel{m_1}\, r^{\cancel{2}}}$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2\mu_1 g \cos\alpha}{r}$$

aus (1): $F_S = m_1 \ddot{x}_1 + \mu_1 m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha \qquad (4)$

(4) in (3): $m_2 \ddot{x}_1 + \mu_2 m_2 g\cos\alpha - \cancel{m_2 g \sin\alpha} + m_1 \ddot{x}_1 + \mu_1 m_1 g \cos\alpha - \cancel{m_1 g \sin\alpha} = 0$

$$\leadsto \ddot{x}_1 (m_2 + m_1) = g \sin\alpha (m_1 + m_2) - g\cos\alpha (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{g \sin\alpha (m_1 + m_2) - g\cos\alpha(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

$$\ddot{x}_1 = g\left(\sin\alpha - \frac{\cos\alpha(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{m_1 + m_2}\right)$$

Aufg. 2.2. nach Lagrange

geg.: $m_1, m_2, r, \mu_1, \mu_2, \alpha, g$

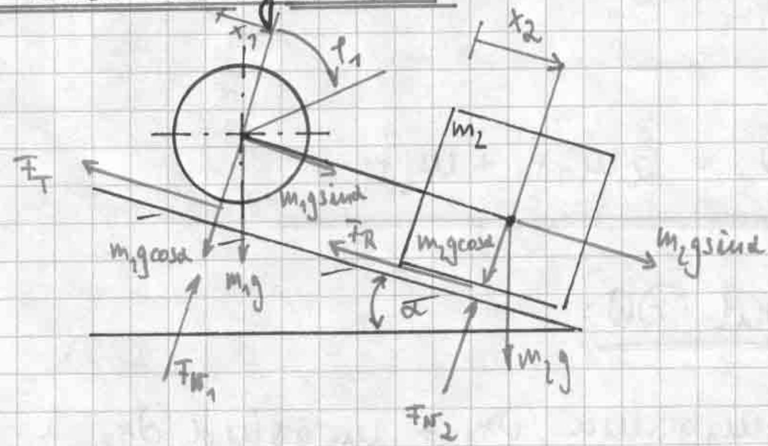
ges.: Beschleunigung und Stabkraft F_S für

1) reines Rollen des Zylinders

2) Rollen + Gleiten des Zylinders

1) reines Rollen des Zylinders

Skizze:



freie Koordinaten: x_1, φ_1, x_2

ZB : $x_1 = r\varphi_1$

$x_1 = x_2$

f : $f = 1$

q : $q = x_1$

Energie des Gesamtsystems:

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{J_1}{2}\cdot\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2$$

mit $J_1 = \frac{m_1 r^2}{2}$; $\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{x}_1}{r}$; $\dot{x}_2 = \dot{x}_1$

$$\leadsto T = \frac{m_1}{2}\cdot\dot{x}_1^2 + \frac{m_1 \cancel{r^2}}{4}\cdot\frac{\dot{x}_1^2}{\cancel{r^2}} + \frac{m_2}{2}\cdot\dot{x}_1^2$$

$$\underline{\underline{T = \frac{3}{4}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_1^2}}$$

$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)$: $\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{3}{2} m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_1$

$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)^{\bullet}$: $\quad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)^{\bullet} = \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_1$

$\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)$: $\quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$

Q_k : $\quad Q_1 = \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_1$

virtuelle Arbeit ∂W:

$$\partial W = m_1 g \sin\alpha \, \partial x_1 + m_2 g \sin\alpha \, \partial x_2 + (-\mu m_2 g \cos\alpha) \, \partial x_2 - F_T \cdot \partial x_1 + F_T \cdot r \, \partial \varphi_1$$

$$\partial W = \left(m_1 g \sin\alpha + m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha \cancel{- F_T} + \cancel{F_T} \cdot \cancel{r} \cdot \frac{1}{\cancel{r}} \right) \partial x_1$$

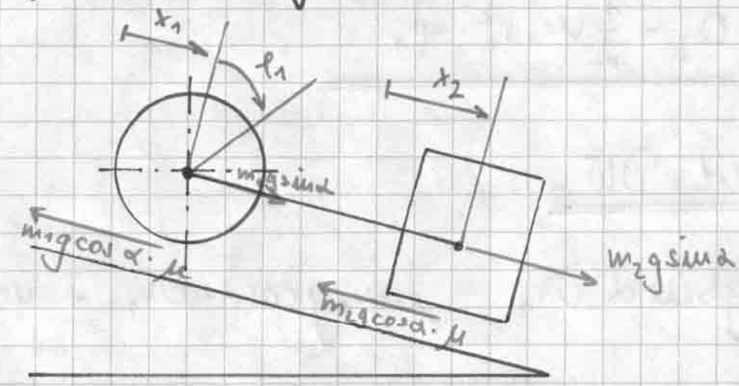
$$\partial W = \left((m_1 + m_2) g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha \right) \partial x_1$$

$$\frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_1 = m_1 g \sin\alpha + m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 g \sin\alpha + m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha}{\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right)}$$

2) Rollen + Gleiten des Zylinders

Skizze:



freie Koordinaten: x_1, φ_1, x_2

ZB: $x_1 = x_2$

f: $f = 2$

q_K: $q_1 = x_1$, $q_2 = \varphi_1$

Energie des Gesamtsystems:

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{J_1}{2}\cdot\dot{\varphi}_1^2$$

$$\text{mit } J_1 = \frac{m_1 r^2}{2}, \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1$$

$$\curvearrowright T = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\cdot\dot{x}_1^2 + \frac{J_1}{2}\cdot\dot{\varphi}_1^2$$

$$T = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\cdot\dot{x}_1^2 + \frac{m_1 r^2}{4}\cdot\dot{\varphi}_1^2$$

$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K}\right)$: $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2\cdot\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\cdot\dot{x}_1$ $\qquad$ $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = 2\frac{m_1 r^2}{4}\cdot\dot{\varphi}_1$

$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K}\right)^{\bullet}$: $\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)^{\bullet} = (m_1 + m_2)\cdot\ddot{x}_1$ $\qquad$ $\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)^{\bullet} = \frac{1}{2}m_1 r^2\cdot\ddot{\varphi}_1$

$\left(\frac{\partial T}{\partial q_K}\right)$: $\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0$

$\leadsto \underline{\underline{Q_K}}$: $\underline{\underline{Q_1 = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1}}$

$\underline{\underline{Q_2 = \frac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \ddot{\varphi}_1}}$

<u>virtuelle Arbeit ∂W:</u>

$$\partial W = m_1 g \sin\alpha \, \partial x_1 - \mu m_1 g \cos\alpha \cdot \partial x_1 + m_2 g \sin\alpha \, \partial x_2 -$$

$$- \mu m_2 g \cos\alpha \, \partial x_2 + \mu m_1 g \cos\alpha \cdot r \, \partial\varphi_1$$

$$\underline{\underline{\partial W = (m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha + m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha)\partial x_1}}$$

$$\underline{\underline{+ (\mu m_1 g \cos\alpha \cdot r)\partial\varphi_1}}$$

$$\leadsto (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x}_1 = m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha + m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha)$$

$$\underline{\underline{\ddot{x}_1 = \frac{m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha + m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha}{m_1 + m_2}}}$$

$$\leadsto \frac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 = \mu m_1 g \cos\alpha \cdot r$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2 \mu \cancel{m_1} g \cos\alpha \cdot \cancel{r}}{\cancel{m_1} \cancel{r^2} r}$$

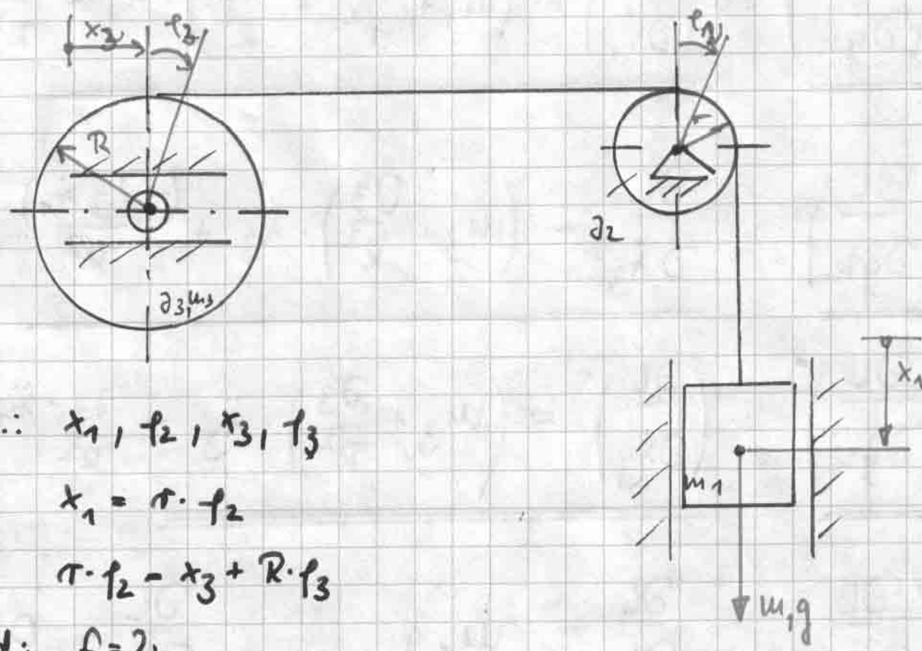
$$\underline{\underline{\ddot{\varphi}_1 = \frac{2 \mu g \cos\alpha}{r}}}$$

Aufg. 2.4. System nach Lagrange

geg.: $m_1, J_2, r, m_3, J_3, R, g$

ges.: Bewegungsgleichung

Skizze:



freie Koord.: $x_1, \varphi_2, x_3, \varphi_3$

ZB: $x_1 = r \cdot \varphi_2$

$r \cdot \varphi_2 = x_3 + R \cdot \varphi_3$

Freiheitsgrad: $f = 2$

generalisierte Koord.: $q_1 = x_1$; $q_2 = x_3$

⇝ Es greifen nur Potentialkräfte an: $L = T - U$

kinetische Gesamtenergie des Systems:

$$T = \frac{m_3}{2}\dot{x}_3^2 + \frac{J_3}{2}\cdot\dot{\varphi}_3^2 + \frac{J_2}{2}\cdot\dot{\varphi}_2^2 + \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2$$

$$T = \frac{m_3}{2}\cdot\dot{x}_3^2 + \frac{J_3}{2}\cdot\left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_3}{R}\right)^2 + \frac{J_2}{2}\cdot\frac{\dot{x}_1^2}{r^2} + \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2$$

potentielle Gesamtenergie des Systems:

$$U = -(m_1 \cdot g \cdot x_1)$$

$$\rightsquigarrow L = \frac{m_3}{2}\cdot\dot{x}_3^2 + \frac{J_3}{2}\cdot\left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_3}{R}\right)^2 + \frac{J_2}{2}\cdot\frac{\dot{x}_1^2}{r^2} + \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + m_1 g x_1$$

$$L = \cancel{\frac{m_3}{2}\dot{x}_3^2} + \frac{J_3}{2}\cdot\frac{\cancel{\dot{x}_1^2} - 2\dot{x}_1\dot{x}_3 + \cancel{\dot{x}_3^2}}{R^2} + \cancel{\frac{J_2}{2}\cdot\frac{\dot{x}_1^2}{r^2}} + \cancel{\frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2} + m_1 g x_1$$

$$L = \dot{x}_1^2\cdot\left(\frac{J_2}{2r^2} + \frac{m_1}{2} + \frac{J_3}{2R^2}\right) + \dot{x}_3^2\cdot\left(\frac{m_3}{2} + \frac{J_3}{2R^2}\right) - \frac{J_3\dot{x}_1\dot{x}_3}{R^2} + m_1 g x_1$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right): \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \left(\frac{\Theta_2}{r^2} + m_1 + \frac{\Theta_3}{R^2}\right)\cdot \dot{x}_1 + \left(-\frac{\Theta_3 \dot{x}_3}{R^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)^{\cdot} : \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)^{\cdot} = \left(m_1 + \frac{\Theta_2}{r^2} + \frac{\Theta_3}{R^2}\right)\cdot \ddot{x}_1 - \frac{\Theta_3}{R^2}\cdot \ddot{x}_3$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) : \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = \left(m_3 + \frac{\Theta_3}{R^2}\right)\cdot \dot{x}_3 + \frac{\left(-\Theta_3 \dot{x}_1\right)}{R^2}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)^{\cdot} : \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right)^{\cdot} = \left(m_3 + \frac{\Theta_3}{R^2}\right)\cdot \ddot{x}_3 - \frac{\Theta_3}{R^2}\cdot \ddot{x}_1$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right): \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = m_1 g \qquad \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0$$

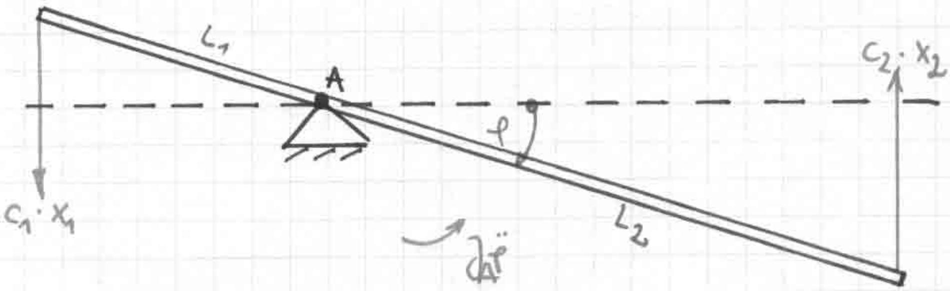
$\rightsquigarrow$ Bewegungsgleichungen:

$$(\mathrm{I}): \quad \left(m_1 + \frac{\Theta_2}{r^2} + \frac{\Theta_3}{R^2}\right)\cdot \ddot{x}_1 \cancel{- m_1 g = 0} - \frac{\Theta_3}{R^2}\cdot \ddot{x}_3 - m_1 g = 0$$

$$(\mathrm{II}): \quad \left(m_3 + \frac{\Theta_3}{R^2}\right)\cdot \ddot{x}_3 - \frac{\Theta_3}{R^2}\cdot \ddot{x}_1 = 0$$

Aufg. 2.15.

<u>Skizze im ausgelenkten Zustand:</u>



<u>Massenträgheitsmoment:</u> $J_A = \dfrac{m \cdot (L_1 + L_2)^2}{12} + m \cdot \left(\dfrac{L_1 + L_2}{2} - L_1 \right)^2$

$$J_A = \frac{m (L_1 + L_2)^2}{12} + m \cdot \left(\frac{L_2}{2} - \frac{L_1}{2} \right)^2$$

⇝ <u>Bewegungsgleichung für kleine φ:</u>

$$\curvearrowleft A: \quad J_A \ddot{\varphi} + c_1 \cdot x_1 \cdot L_1 \cos\varphi + c_2 x_2 \cdot L_2 \cos\varphi = 0$$

für kleine $\varphi \rightarrow \cos\varphi \approx 1$;

$x_1 = L_1 \sin\varphi$; $x_2 = L_2 \sin\varphi$

für kleine $\varphi \rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$

$\underline{x_1 = L_1 \cdot \varphi}$; $\underline{x_2 = L_2 \cdot \varphi}$

$$\rightsquigarrow \quad J_A \cdot \ddot{\varphi} + c_1 \cdot L_1^2 \cdot \varphi + c_2 \cdot L_2^2 \cdot \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_1 L_1^2 + c_2 L_2^2}{J_A} \cdot \varphi = 0$$

⇝ Eigenkreisfrequenz ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 L_1^2 + c_2 L_2^2}{J_A}}$$

mit: $$J_A = \frac{m}{12} \cdot L_1^2 + \frac{m}{12} \cdot 2 L_1 L_2 + \frac{m}{12} L_2^2 + \frac{m}{4} \cdot L_2^2 - \frac{m}{2} L_1 L_2 + \frac{m}{4} L_1^2$$

$$J_A = \frac{1}{3} m L_1^2 + \frac{1}{3} m L_2^2 - \frac{1}{3} m L_1 L_2$$

$$\underline{J_A = \frac{1}{3} m \left(L_1^2 + L_2^2 - L_1 L_2 \right)}$$

$$\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 L_1^2 + c_2 L_2^2}{\frac{1}{3} m \left(L_1^2 + L_2^2 - L_1 L_2 \right)}}}$$

Aufg. 2.16.

⇝ Bestimmung des Trägheitsmomentes J_A:

$$J_A = \left(\frac{m_V \cdot R^2}{2} + m_V R^2\right) - \left(\frac{m_L \cdot r^2}{2} + m_L r^2\right)$$

$m = \rho \cdot V$

$\curvearrowright \underline{m_V = \rho \cdot t \cdot \pi \cdot R^2}$ $\qquad \curvearrowright m_L = \rho \cdot t \cdot \pi \cdot r^2 \quad \left(r = \frac{R}{2}\right)$

$$\underline{m_L = \rho \cdot t \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{4}}$$

$m_{ges} = m_V - m_L$

$m_{ges} = \rho \cdot t \cdot \pi \cdot R^2 - \rho \cdot t \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{4}$

$$\underline{\underline{m_{ges} = \frac{3}{4} \rho \cdot t \cdot \pi \cdot R^2}}$$

$\rightarrow \frac{m_V}{m_{ges}} = \frac{4}{3} \quad \curvearrowright \quad \underline{m_V = \frac{4}{3} m_{ges}}$

$\rightarrow \frac{m_L}{m_{ges}} = \frac{1}{3} \quad \curvearrowright \quad \underline{m_L = \frac{1}{3} m_{ges}}$

$$\curvearrowright J_A = \left(\frac{\frac{4}{3} m_{ges} \cdot R^2}{2} + \frac{4}{3} m_{ges} \cdot R^2\right) - \left(\frac{\frac{1}{3} m_{ges} \cdot \frac{R^2}{4}}{2} + \frac{1}{3} m_{ges} \cdot \frac{R^2}{4}\right)$$

$J_A = \frac{15}{8} m_{ges} \cdot R^2 \qquad$ mit $m_{ges} = m \quad \curvearrowright$

$$\underline{\underline{J_A = \frac{15}{8} m R^2}}$$

↝ **Bestimmung der Gesamtfedersteifigkeit:**

→ Reihenschaltung: $\frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c_{Blattf.}}$

$F_{Blattf.} = c_{Blattf} \cdot v_{Blattf.}$

v_B über Biegelinie: $M = -EI \cdot v''$

$$\frac{-F_B \cdot L}{EI} = v''$$

$$\rightarrow v = \frac{F_B \cdot L^3}{3EI}$$

$$F_B = c_B \cdot \frac{F_B \cdot L^3}{3EI} \quad \curvearrowright \quad c_B = \frac{3EI}{L^3}$$

$$\curvearrowright \frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c_B}$$

$$= \frac{1}{c} + \frac{L^3}{3EI}$$

$$= \frac{3EI + cL^3}{3EI \cdot c}$$

$$\Rightarrow c_{ges} = \frac{3EI \cdot c}{3EI + c \cdot L^3}$$

Bestimmung des Schwerpunktes:

⇝ Schwerpunktsatz: $m \cdot \vec{r}_S = \sum m_i \vec{r}_{Si}$

$$r_S = \frac{m_V \cdot R - m_L \cdot r}{m}$$

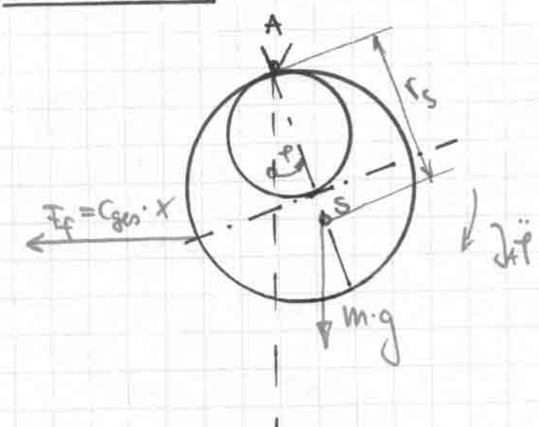
mit $m_V = \frac{4}{3} m$ und $m_L = \frac{1}{3} m$ ⇝

$$r_S = \frac{\frac{4}{3} \cancel{m} \cdot R - \frac{1}{3} \cancel{m} \cdot \frac{R}{2}}{\cancel{m}}$$

$$r_S = \frac{7}{6} R$$

⇝ Einführung eines Ersatzsystems:

Skizze im ausgelenkten Zustand:



⇝ Schwingungsdifferentialgleichung:

$$A) : J_A \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot r_S \sin \varphi + c_{ges} \cdot R \cdot \sin \varphi \cdot R \cdot \cos \varphi$$

$$\sin \varphi \approx \varphi \; ; \; \cos \varphi \approx 1$$

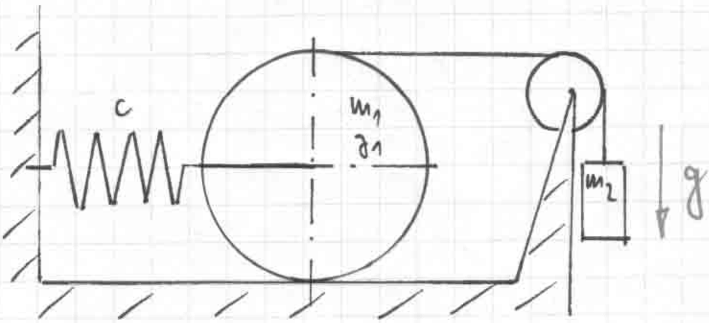
$$J_A \ddot{\varphi} + c_{ges} \cdot R^2 \varphi + mg \cdot r_S \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{(c_{ges} \cdot R^2 + mg \cdot r_S)}{J_A} \cdot \varphi = 0$$

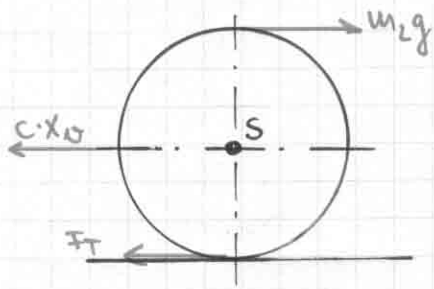
$$\ddot{\varphi} + \frac{\left(\frac{3EI \cdot c}{3EI + cL^3}\right) \cdot R^2 + m \cdot g \cdot \frac{7}{6} R}{\frac{15}{8} m R^2} \cdot \varphi = 0$$

Aufg. 2.22.

Skizze:



statisch:



$$\rightarrow: \quad m_2 g - c\cdot x_v - F_T = 0$$

$$\circlearrowleft S: \quad -m_2 g\cdot r - F_T\cdot r = 0$$

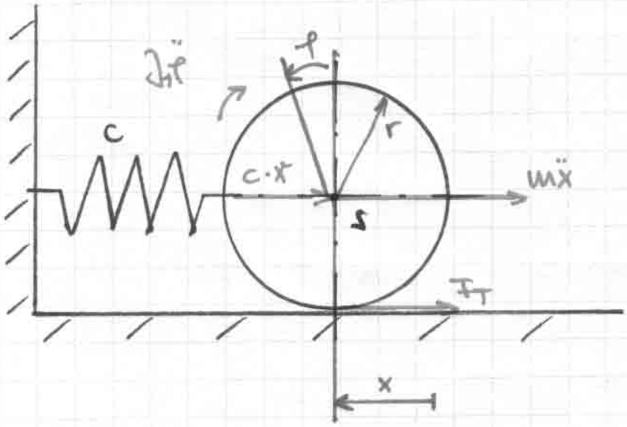
$$\underline{F_T = -m_2 g}$$

$$\hookrightarrow \quad m_2 g - c\cdot x_v - F_T = 0$$

$$m_2 g - c\cdot x_v + m_2 g = 0$$

$$\underline{\underline{x_v = \frac{2 m_2 g}{c}}}$$

dynamisch nach Abwurf von m_2:



ZB: $x = r\varphi$

$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$

$\rightarrow: \quad m_1\ddot{x} + F_T + c\cdot x = 0$

$s): \quad J_1\ddot{\varphi} - F_T\cdot r = 0$

$F_T = \frac{J_1\ddot{\varphi}}{r}$

$$m_1\ddot{x} + \frac{J_1\ddot{\varphi}}{r} + c\cdot x = 0$$

$$m_1\ddot{x} + \frac{J_1\cdot\ddot{x}}{r^2} + c\cdot x = 0$$

$$\left(\frac{J_1}{r^2} + m_1\right)\ddot{x} + c\cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{\frac{J_1}{r^2} + m_1}\cdot x = 0$$

~ Eigenkreisfrequenz ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{\frac{J_1}{r^2} + m_1}}$$

$\leadsto$ Kraft F_B auf Wand:

Ansatz: harmonische Schwingung

$$x(t) = A \sin \omega_0 \cdot t + B \cos \omega_0 \cdot t$$

$$\dot{x}(t) = \omega_0 A \cos \omega_0 \cdot t - \omega_0 B \sin \omega_0 \cdot t$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \sin \omega_0 t - B\omega_0^2 \cos \omega_0 \cdot t$$

AB: $x(t) = x_v$; $\dot{x}(t) = 0$; $\ddot{x}(t) = 0$ für $t = 0$

$$\curvearrowright x_v = 0 + B$$

$$x_v = B = \frac{2m_2 g}{c}$$

$$\dot{x}(t) = 0 = A \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t - 0$$

$$\curvearrowright A = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{2m_2 g}{c} \cdot \cos \omega_0 \cdot t$$

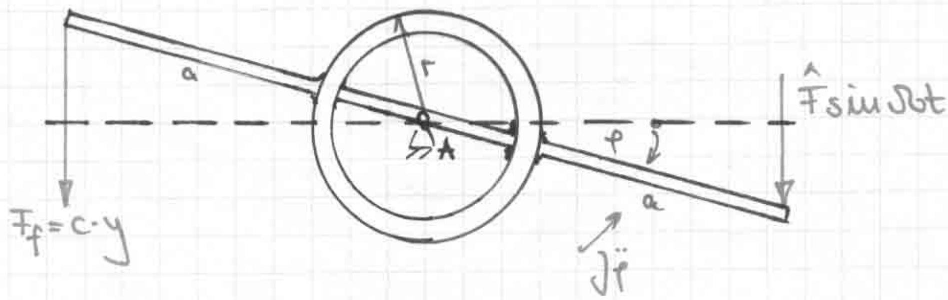
$$\leadsto F_B = c \cdot x(t)$$

$$F_B = 2m_2 g \cdot \cos \omega_0 \cdot t$$

$$F_B = 2m_2 g \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{c}{\frac{\Theta_1}{r_1} + m_1}} \cdot t\right)$$

Aufg. 2.23.

Skizze im ausgelenkten Zustand:



↝ Massenträgheitsmoment J_A:

Stab: $J_{Stab} = \dfrac{m_S \cdot (2a + 2r)^2}{12}$

Ring: $J_{Ring} = m_R \cdot r^2$

$$\curvearrowright \quad J_A = J_{Stab} + J_{Ring}$$
$$= \frac{m_S (2a + 2r)^2}{12} + m_R \cdot r^2$$

$$\underline{\underline{J_A = 1600 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2}}$$

↝ Bewegungsgleichung:

$$\curvearrowleft A: \quad J_A\ddot{\varphi} + c \cdot y \cdot (a+r)\cos\varphi - \hat{F} \sin \Omega t \cdot (a+r) \cos\varphi = 0$$

$$\cos\varphi \approx 1$$

$$J_A\ddot{\varphi} + c \cdot y \cdot (a+r) = (a+r)\hat{F} \sin \Omega t$$

$$y = (a+r) \sin\varphi$$

$$y = (a+r)\cdot \varphi$$

$$J_A\,\ddot{\varphi} + c\cdot(a+r)^2\cdot\varphi = (a+r)\cdot\hat{F}\sin\Omega t$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c\cdot(a+r)^2}{J_A}\cdot\varphi = \frac{(a+r)}{J_A}\cdot\hat{F}\sin\Omega t$$

$$\text{mit } J_A = \frac{m_S\,(a+r)^2}{3} + m_R\cdot r^2$$

$$\curvearrowright\ \ddot{\varphi} + \frac{c\cdot(a+r)^2}{\frac{m_S\,(a+r)^2}{3} + m_R\cdot r^2}\,\varphi = \frac{(a+r)}{\frac{m_S(a+r)^2}{3} + m_R\cdot r^2}\,\hat{F}\sin\Omega t$$

$\rightsquigarrow$ <u>Amplitude $\hat{\varphi}$ der Schwingung:</u>

<u>Ansatz:</u>

$$\varphi = A\sin\Omega t$$

$$\dot{\varphi} = A\,\Omega\cos\Omega t$$

$$\ddot{\varphi} = -A\,\Omega^2\sin\Omega t$$

$$\rightsquigarrow\ -A\cdot\Omega^2\cancel{\sin\Omega t} + \omega_0^2\cdot A\,\cancel{\cos}\,\cancel{\sin\Omega t} = \frac{(a+r)}{J_A}\,\hat{F}\,\cancel{\sin\Omega t}$$

$$A\left(-\Omega^2 + \omega_0^2\right) = \frac{(a+r)}{J_A}\cdot\hat{F}$$

$$A\cdot\omega_0^2\cdot\left(1-\eta^2\right) = \frac{(a+r)}{J_A}\cdot\hat{F}$$

$$A = \frac{(a+r)}{J_A}\cdot\frac{J_A}{c(a+r)^2}\cdot\frac{1}{(1-\eta^2)}\cdot\hat{F}$$

$$A = \frac{1}{c(a+r)} \cdot \frac{1}{(1-\eta^2)} \cdot \hat{F}$$

$$\eta^2 = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \quad \curvearrowright \quad \omega_0^2 = \frac{c \cdot (a+r)^2}{\frac{m_S(a+r)^2}{3} + m_R \cdot r^2}$$

$$\omega_0^2 = 2500\ s^{-2}$$

$$\curvearrowright \eta^2 = \frac{10\,000}{2500}$$

$$\eta^2 = 4 \quad \curvearrowright \eta = 2$$ ⇝ tiefabgestimmter Bereich

$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{\hat{F}}{c(a+r) \cdot (1-\eta^2)} \cdot \sin \Omega t$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\hat{F}}{c(a+r) \cdot (1-\eta^2)}$$

$$|\hat{\varphi}| = 0{,}1\ \text{rad} \approx 5{,}655^\circ$$

⇝ Kraft F_B auf Boden

$$F_B = c \cdot (a+r)\varphi$$

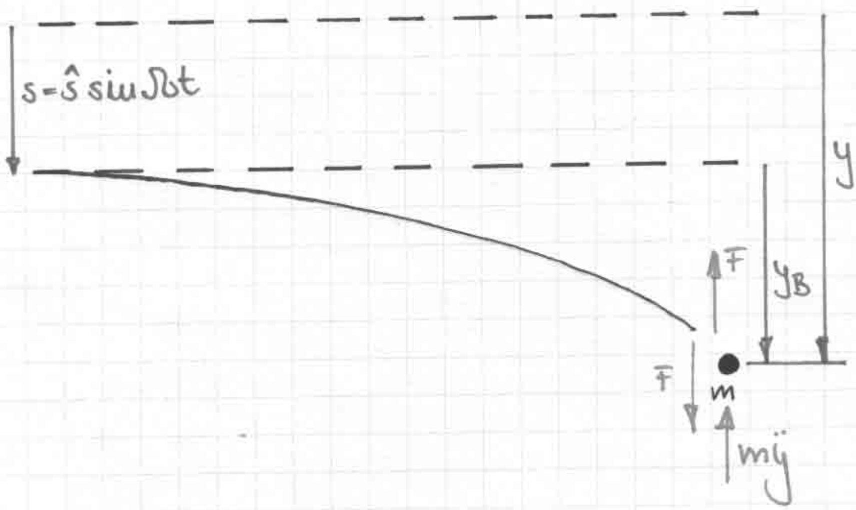
$$= \frac{c \cdot (a+r)\hat{F}}{c(a+r)(1-\eta^2)} \cdot \underbrace{\sin \Omega t}_{=1 \rightarrow \text{Maximum}}$$

$$\hat{F}_B = \frac{\cancel{c} \cdot \cancel{(a+r)}\hat{F}}{\cancel{c}\cancel{(a+r)}(1-\eta^2)}$$

$$\hat{F}_B = \frac{\hat{F}}{(1-\eta^2)} = 200\ N$$

Aufg. 2.24.

Skizze im ausgelenkten Zustand:



$\uparrow: \quad m\ddot{y} + F = 0 \qquad\qquad y_B = \dfrac{F \cdot L^3}{3EI}$

$\curvearrowright F = \dfrac{3EI \cdot y_B}{L^3} \qquad y_B = y - s$

$$\rightsquigarrow m\ddot{y} + \frac{3EI \cdot (y-s)}{L^3} = 0$$

$$m\ddot{y} + \frac{3EI \cdot (y - \hat{s}\sin\Omega t)}{L^3} = 0$$

$$m\ddot{y} + \frac{3EI}{L^3} \cdot y = \frac{3EI}{L^3} \cdot \hat{s}\sin\Omega t$$

$$\ddot{y} + \frac{3EI}{mL^3} \cdot y = \frac{3EI}{mL^3} \cdot \hat{s}\sin\Omega t$$

$\rightsquigarrow$ Eigenkreisfrequenz ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}}$$

$$\omega_0 = 100\ s^{-1}$$

$\rightsquigarrow$ Bewegung der Masse im stationären Zustand:

Ansatz: $y = A \cdot \sin \Omega t$

$\ddot{y} = -A \cdot \Omega^2 \sin \Omega t$

$$\curvearrowright\ -A \cdot \Omega^2 \cdot \sin \Omega t + \frac{3EI}{mL^3} \cdot A \sin \Omega t = \frac{3EI}{mL^3} \hat{s} \sin \Omega t$$

$\rightsquigarrow$! Maximum $\curvearrowright$ $\sin \Omega t \overset{!}{=} 1$ $\curvearrowright$

$$-A \cdot \Omega^2 + \omega_0^2 \cdot A = \frac{3EI}{mL^3} \hat{s} \cdot \cancel{\sin \Omega t}$$

$$A(-\Omega^2 + \omega_0^2) = \frac{3EI}{mL^3} \cdot \hat{s}$$

$$A \omega_0^2 (1 - \eta^2) = \frac{3EI}{mL^3} \cdot \hat{s}$$

$$A = \frac{3EI}{mL^3} \cdot \frac{mL^3}{3EI} \cdot \frac{1}{(1-\eta^2)} \cdot \hat{s}$$

$$A = \frac{1}{(1-\eta^2)} \cdot \hat{s}$$

$\rightsquigarrow$ $\eta^2 = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = 0{,}4999$

$\eta = 0{,}7071$ $\rightsquigarrow$ hochabgestimmtes Bereich

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{y(t) = \frac{1}{(1-\eta^2)} \cdot \hat{s} \sin \Omega t}}$$

$$\hat{y} = \frac{1}{(1-\eta^2)} \cdot \hat{s}$$

$$\underline{\underline{\hat{y} = 2\,\text{mm}}}$$

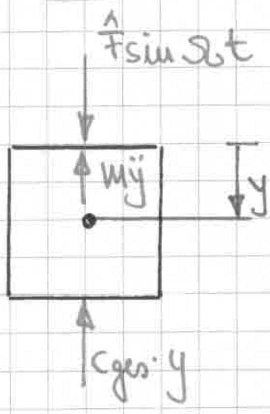
$\leadsto$ <u>Biegewechselmoment an Einspannstelle:</u>

$$M(t) = F(t) \cdot L = \frac{3EI}{L^3} \cdot \left(y(t) - s(t)\right) \cdot L$$

$$\underline{\underline{M(t) = \frac{3EI}{L^2} \cdot \left(\frac{1}{(1-\eta^2)} \cdot \hat{s} \sin \Omega t - \hat{s} \sin \Omega t \right)}}$$

$$\underline{\underline{\hat{M} = 100\,\text{N} \cdot \text{m}}}$$

Aufg. 2.25.



Glg.: $m\ddot{y} + c_{ges} \cdot y = \hat{F} \sin \Omega t$

$$\ddot{y} + \frac{c_{ges}}{m} \cdot y = \frac{\hat{F}}{m} \cdot \sin \Omega t$$

Ansatz: $y = A \sin \Omega t$

$$\ddot{y} = -A\Omega^2 \sin \Omega t$$

$$\curvearrowright \quad -A\Omega^2 \cancel{\sin \Omega t} + \frac{c_{ges}}{m} \cdot A \cancel{\sin \Omega t} = \frac{\hat{F}}{m} \cdot \cancel{\sin \Omega t}$$

$$A \cdot \left(-\Omega^2 + \frac{c_{ges}}{m}\right) = \frac{\hat{F}}{m} \qquad \text{mit } \frac{c_{ges}}{m} = \omega_0^2$$

$$\omega_0 = 100 \; s^{-1}$$

$$A \cdot \omega_0^2 \left(\underbrace{\frac{-\Omega^2}{\omega_0^2}}_{= -\eta^2} + 1\right) = \frac{\hat{F}}{m}$$

$$A = \frac{\hat{F}}{\cancel{m}} \cdot \frac{1}{(1-\eta^2)} \cdot \frac{\cancel{m}}{c_{ges}}$$

$$A = \frac{\hat{F}}{c_{ges}} \cdot \frac{1}{(1-\eta^2)}$$

$$\Omega = 2\pi f_{err} = 2\pi n = 62{,}83 \; s^{-1}$$

$$\eta^2 = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = 0{,}3948$$

$$\curvearrowright \quad y = \frac{\hat{F}}{c_{ges}} \cdot \frac{1}{(1-\eta^2)} \cdot \sin \Omega t$$

$$\hat{y} = \frac{\hat{F}}{c_{ges}} \cdot \frac{1}{(1-\eta^2)} \qquad \hat{y} = 0{,}0826 \; cm$$

c_{ges}, damit im stationären Betrieb nur 10% der Unwuchtkraft auf Boden übertragen werden:

$$\hat{F}_{dyn} = c_{ges} \cdot \hat{y}$$

$$\frac{\hat{F}_{dyn}}{\hat{F}} = \frac{1}{10\%} = \frac{c_{ges} \cdot \hat{y}}{\hat{F}}$$

$$\frac{1}{10\%} = \frac{c_{ges} \cdot \hat{F}}{\hat{F} \cdot c_{ges} \quad (1-\eta^2)}$$

$$\frac{1}{10\%} = \frac{1}{(1-\eta^2)}$$

$$1-\eta^2 = 10\%$$

→ $1-\eta^2$ wird nur bei Vorzeichenwechsel 10 ⇒ Vorzeichenwechsel !

$$\Rightarrow 10+1 = \eta^2 = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}$$ mit $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ ⇒

$$11 = \frac{\Omega^2 m}{c^*_{ges}}$$

$$c^*_{ges} = \frac{\Omega^2 \cdot m}{11}$$

$$c^*_{ges} = 71778{,}9 \text{ N/m}$$

Aufg. 2.26.

→ geschwindigkeitsproportionale Dämpfung

Ansatz: $q = e^{-\delta t} \cdot (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$

$$\Lambda = \delta T = \ln \frac{q_K}{q_{K+2}}$$

$$\delta T = \ln \frac{x_1}{x_2} \qquad \text{mit } \delta = \frac{b}{2m}$$

$$\frac{b}{2m} \cdot T = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

$$b = \frac{1}{T} \cdot \ln \frac{x_1}{x_2} \cdot 2m$$

$$\underline{\underline{b = 8{,}3177 \ \frac{kg}{s}}}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \ ; \ \omega_0^2 = \frac{c}{m} \ ; \ \delta = \frac{b}{2m}$$

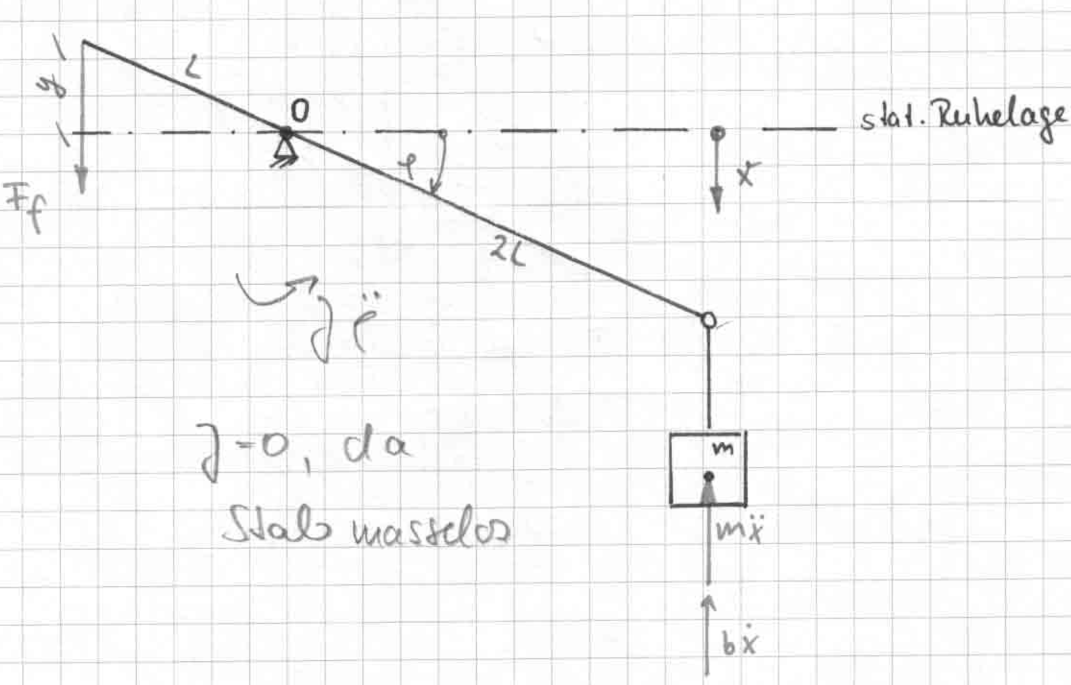
$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

$$c = \left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{b^2}{4m^2}\right) \cdot m$$

$$\underline{\underline{c = 479{,}5 \ kg/s^2}}$$

Aufg. 2.27.

Skizze im ausgelenkten Zustand:



Hebelgesetz: $\frac{x}{2L} = \frac{y}{L} \;\leadsto\; \underline{\underline{y = \frac{x}{2}}}$

$$\curvearrowleft 0: \quad c \cdot y \cdot L \cdot \cos\varphi + m\ddot{x} \cdot 2L\cos\varphi + b\dot{x} \cdot 2L\cos\varphi = 0$$

$$\cos\varphi \approx 1$$

$$c \cdot L \cdot \frac{x}{2} + m\ddot{x} \cdot 2L + b\dot{x} \cdot 2L = 0 \quad \Big| : m2L$$

$$\underline{\underline{\ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{4m} \cdot x = 0}}$$

Anfangsbedingung: $t = 0$; $x = x_0$; $v = \dot{x} = 0$

Ansatz: $q = e^{-\delta t} \cdot (A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

mit $q = x$; $A = x_0$; $B = \frac{x_0 \cdot \delta}{\omega}$

$$2\delta = \frac{b}{m} \rightarrow \underline{\underline{\delta = \frac{b}{2m}}}$$

$$\underline{\underline{\omega_0^2 = \frac{c}{4m}}}$$

$$\rightsquigarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{c}{4m} - \frac{b^2}{4m^2}}}}$$

→ Bewegung $x(t)$ der Masse:

$$\underline{\underline{x(t) = e^{-\frac{b}{2m}\cdot t} \cdot \left(x_0 \cdot \cos\omega t + \frac{x_0 \cdot \delta}{\omega} \cdot \sin\omega t \right)}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = e^{-\frac{b}{2m}\cdot t} \cdot \left(x_0 \cdot \cos\omega t + \frac{x_0 \cdot b}{2m\,\omega} \cdot \sin\omega t \right)}}$$ ✓

⇝ Schwingungsdauer T des Systems:

$$T = \frac{2\cdot\pi}{\omega} \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{c}{4m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

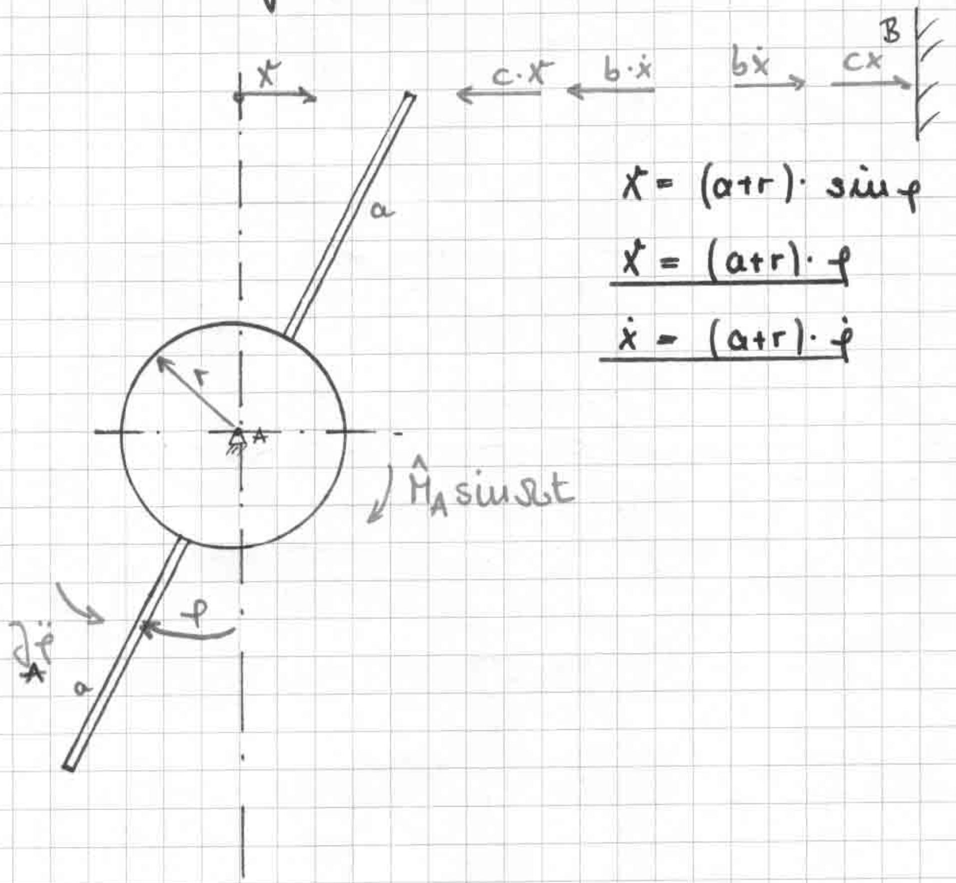
$$\omega = \sqrt{\frac{100\,kg\cdot m}{s^2\cdot cm \cdot 4 \cdot 10kg} - \frac{1\,kg^2\cdot m^2\cdot s^2}{s^4\, cm^2 \cdot 4 \cdot (10kg)^2}}$$

$$\underline{\underline{\omega = 15{,}0\ s^{-1}}}$$ ✓

$$\underline{\underline{T = \cancel{0{,}397s}\ 0{,}4188s}}$$ ✓

Aufg. 2.28.

Skizze im ausgelenkten Zustand:



$x = (a+r) \cdot \sin\varphi \qquad \sin\varphi \approx \varphi$

$\underline{x = (a+r) \cdot \varphi}$

$\underline{\dot{x} = (a+r) \cdot \dot{\varphi}}$

Berechnung von J_A:

Stäbe: $$J_{Stab} = \frac{m_2 a^2}{12} + m_2 \cdot \left(\frac{a}{2} + r\right)^2$$

da 2 Stäbe: $$J_{Stäbe} = 2 \cdot \left(\frac{m_2 a^2}{12} + m_2 \left(\frac{a}{2} + r\right)^2\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{m_2 a^2}{6} + 2 m_2 \left(\frac{a}{2} + r\right)^2}}$$

Vollscheibe: $$J_{VS} = \frac{m_1 \cdot r^2}{2}$$

$\rightarrow J_A = J_{Stäbe} + J_{VS}$

$$= \underline{\underline{\frac{m_2 a^2}{6} + 2\left(m_2\left(\frac{a}{2} + r\right)^2\right) + \frac{m_1 \cdot r^2}{2}}}$$

~ **Bewegungsgleichung für kleine φ:**

$$A: \quad J_A \ddot{\varphi} + c\,(a+r)\cdot\varphi\cdot(a+r)\cos\varphi + b\cdot(a+r)\cdot\dot{\varphi}\cdot(a+r)\cos\varphi = \hat{M}_A \sin\Omega t$$

$\cos\varphi \approx 1$ (für kleine φ)

$$J_A \ddot{\varphi} + c\cdot(a+r)^2\cdot\varphi + b\cdot(a+r)^2\cdot\dot{\varphi} = \hat{M}_A \sin\Omega t$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{b\cdot(a+r)^2}{J_A}\cdot\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{c\,(a+r)^2}{J_A}}_{c\ (\text{ohne } J_A)}\cdot\varphi = \underbrace{\frac{\hat{M}_A}{J_A}}_{\hat{f}\ (\text{ohne } J_A)}\sin\Omega t$$

~ **Bewegung $\varphi(t)$:**

da $\Omega \neq$ konst, also variabel ($\uparrow$ Aufg-stellung) $\uparrow$

Lösung ~~Ansatz:~~ $\quad q_{part} = q_{stat}\, V_1\cdot\sin(\Omega t - \varphi)$

$$q_{stat} = \frac{\hat{f}}{c} = \frac{\hat{M}_A}{J_A}\cdot\frac{J_A}{c(a+r)^2}$$

$$q_{stat} = \frac{\hat{M}_A}{c(a+r)^2}$$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\cdot D^2\cdot\eta^2}}$$

mit $\eta^2 = \dfrac{\Omega^2}{\omega_0^2}$

und $D = \frac{\delta}{\omega_0}$

$$\underline{\delta = \frac{b \cdot (a+r)^2}{2 \cdot J_A}}$$

$$\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{c \cdot (a+r)^2}{J_A}}}$$

$$\rightarrow D = \frac{b \cdot (a+r)^2}{2 J_A \sqrt{\frac{c \cdot (a+r)^2}{J_A}}}$$

$$\underline{\underline{D = \frac{b \cdot (a+r)}{2 \cdot \sqrt{c \cdot J_A}}}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{q_{part}}_{=\psi} = \underbrace{\underbrace{\frac{\hat{M}_A}{c(a+r)^2}}_{q_{stat}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{b \cdot (a+r)}{2\sqrt{c J_A}}\right)^2 \cdot \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}}_{=V_1}}}_{\hat{\varphi}} \cdot \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$\underline{\text{mit } \varphi = \arctan \frac{2 D \eta}{1 - \eta^2}}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{b}{m_1}\cdot\dot{y} + \frac{c}{m_1}\cdot y = 0$$

Ansatz: $q = e^{-\delta t}\cdot(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

AB: $t = 0;\ y = y_0;\ \dot{y} = 0$

$$\Rightarrow A = y_0 \quad ; \quad B = \frac{y_0\cdot\delta}{\omega}$$

$$\delta = \frac{b}{2m_1} \qquad \omega_0^2 = \frac{c}{m_1}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

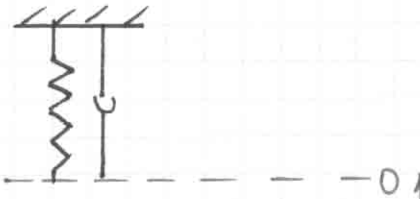
$$= \frac{c}{m_1} - \frac{b}{2m_1} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m_1} - \frac{b}{2m_1}}$$

$$\rightsquigarrow y = e^{-\frac{b}{2m_1}\cdot t}\cdot\left(y_0\cos\omega t + \frac{y_0\cdot b}{2m_1\cdot\sqrt{\frac{c}{m_1} - \frac{b}{2m_1}}}\cdot\sin\omega t\right)$$

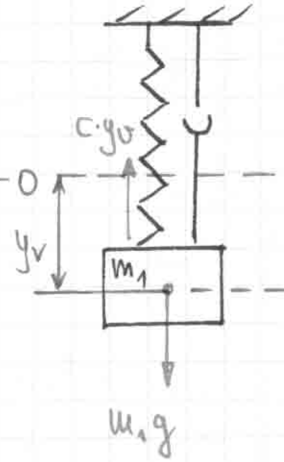
Aufg. 2.31 als freie gedämpfte Schwingung

Skizzen:

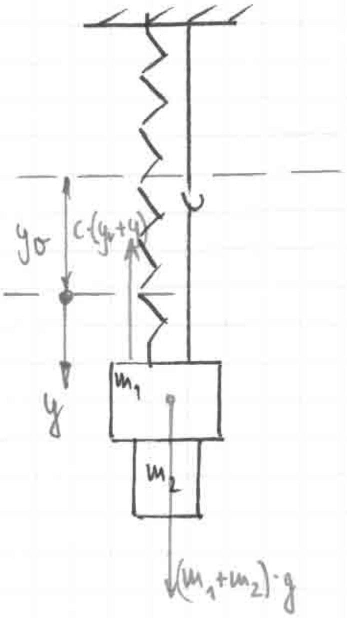
ohne Massen:



mit Masse m_1:



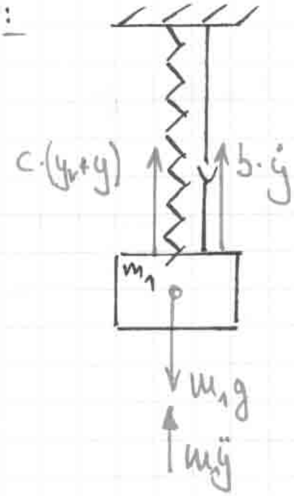
mit Massen m_1 und m_2:



$$\rightarrow \quad c \cdot y_v = m_1 \cdot g$$

$$\underline{\underline{y_v = \frac{m_1 \cdot g}{c}}}$$

nach Abwurf von m_2:



$$\rightsquigarrow : \ \uparrow : \quad m_1\ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot (y_v + y) - m_1 g = 0$$

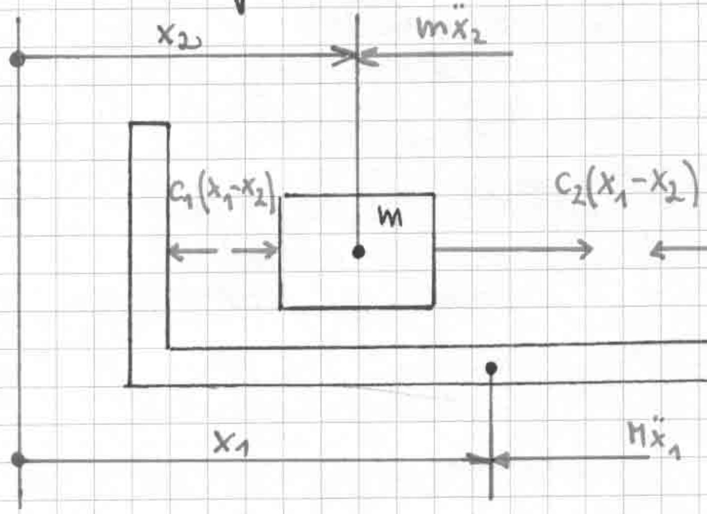
$$m_1\ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot \left(\frac{m_1 g}{c} + y\right) - m_1 g = 0$$

$$\underline{m_1\ddot{y} + b\dot{y} + c \cdot y = 0}$$

Aufg. 2.34. ⇝ gekoppelte, reibungsfreie Schwingung

→ $f = 2$ ↷ 2 Gleichungen zur Beschreibung notwendig

Skizze im ausgelenkten Zustand:



für M: ←: $M\ddot{x}_1 + c_1(x_1-x_2) + c_2(x_1-x_2) = 0$

$\ddot{x}_1$ positiv
↷ x_1 ⇒ positiv

↷ $\underline{\underline{M\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)(x_1-x_2) = 0}}$

für m: ←: $m\ddot{x}_2 - c_1(x_1-x_2) - c_2(x_1-x_2)$

↷ $\underline{\underline{m\ddot{x}_2 - (c_1+c_2)(x_1-x_2) = 0}}$

Aufg. 5.2. Rotierende Kreisscheibe

geg.: $R, m, J_S, \mu, g, \dot\varphi(t=0) = \Omega$

ges.: a) $\dot\varphi(t)$, wenn die Flächenpressung als konst. vorausgesetzt wird

b) Zeit τ bis zum Stillstand der Scheibe

Lsg.: Druck: $p = \frac{m \cdot g}{R^2 \pi}$

Reibmoment: $M_R = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} \frac{\mu m g}{R^2 \pi} \cdot r^2 \, dr \, d\varphi$

$$M_R = \frac{2}{3} \mu m g R$$

Bewegungsglg.: $J_S \ddot\varphi + M_R = 0$

$$\ddot\varphi = -\frac{M_R}{J_S}$$

$$\dot\varphi = -\frac{M_R}{J_S} \cdot t + c_1$$

AB: $t = 0$; $\dot\varphi(t=0) = \Omega$

$\curvearrowright$ $c_1 = \Omega$

$$\Rightarrow \dot\varphi(t) = -\frac{M_R}{J_S} \cdot t + \Omega$$

b) $\dot\varphi \stackrel{!}{=} 0 \leadsto t = \tau$ $\quad \tau = \frac{J_S \cdot \Omega}{M_R}$

$$\tau = \frac{3 J_S \Omega}{2 \mu m g R}$$

Aufg. 5.5.

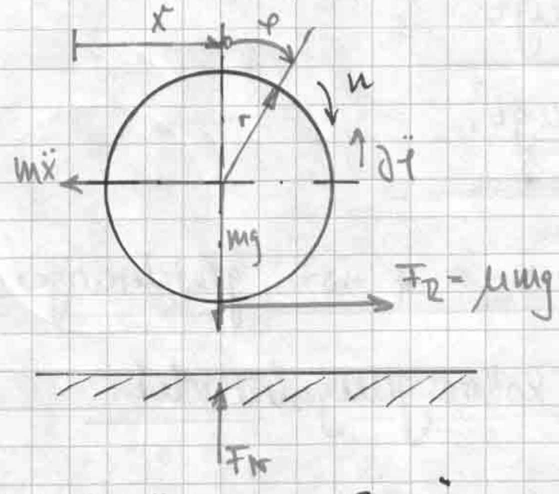
geg.: $m = 10\,kg$, $n = 1000\,min^{-1}$, $r = 10\,cm$

$\mu = 0{,}1$, $J_S = \frac{m}{2} r^2$; $g = 10\,m/s^2$

ges.: 1) τ bis gleichzeitiger Rutsch- und Rollvorgang beendet

2) $s(\tau)$

Skizze:



$$\rightsquigarrow\ J_S\ddot{\varphi} + \mu m g r = 0 \qquad \rightsquigarrow\ \ddot{\varphi} = -\frac{\mu m g r}{J_S}$$

$$m\ddot{x} - \mu m g = 0 \qquad \rightsquigarrow\ \ddot{x} = \mu g$$

Integration: $\ddot{\varphi} = -\frac{\mu m g r}{J_S}$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\mu m g r}{J_S} \cdot t + c_1$$

$$\varphi = -\frac{\mu m g r}{2 J_S} \cdot t^2 + c_1 \cdot t + c_2$$

AB: $t = 0$; $\dot{\varphi} = 2\pi n = \Omega$; $\varphi = 0$

$$\rightsquigarrow\ \dot{\varphi} = \frac{-\mu m g r}{J_S} \cdot t + \Omega$$

$$\varphi = \frac{-\mu m g r}{\ldots} \cdot t^2 + \Omega t$$

$$\ddot{x} = \mu g$$

$$\dot{x} = \mu g t + c_3$$

$$x = \frac{\mu g}{2} t^2 + c_3 t + c_4$$

<u>AB</u>: $t=0$; $\dot{x} = 0$; $x=0$ $\curvearrowright$ $c_3 = 0$, $c_4 = 0$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\dot{x} = \mu g t}}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\mu g t^2}{2}}}$$

$\rightsquigarrow$ <u>für ZB: $x = r \cdot \varphi$ ist gleichzeitiger Rutsch und</u>

<u>Rollvorgang beendet:</u>

$$\dot{x} = r \cdot \dot{\varphi}$$

$$\curvearrowright \quad \mu g t = r \cdot \frac{-\mu m g r}{J_S} \cdot t + r\Omega$$

<u>mit $t = \tau$</u>: $\mu g \tau = -\frac{\mu m g r^2}{J_S} \cdot t + r\Omega$

$$\text{mit } J_S = \frac{m}{2} r^2 \quad \curvearrowright$$

$$\mu g \tau = \frac{-2\mu m g r^2}{\cancel{m r^2}} \tau + r\Omega$$

$$\mu g \tau = -2\mu g \tau + r\Omega$$

$$\underline{\underline{\tau = \frac{r\Omega}{3\mu g}}}$$

b): $s_1(\tau) = \frac{\mu g \tau^2}{2}$ $\qquad$ $s_2(\tau) = \frac{-\mu m g r}{2 J_S} \cdot \tau^2 + \Omega \tau$

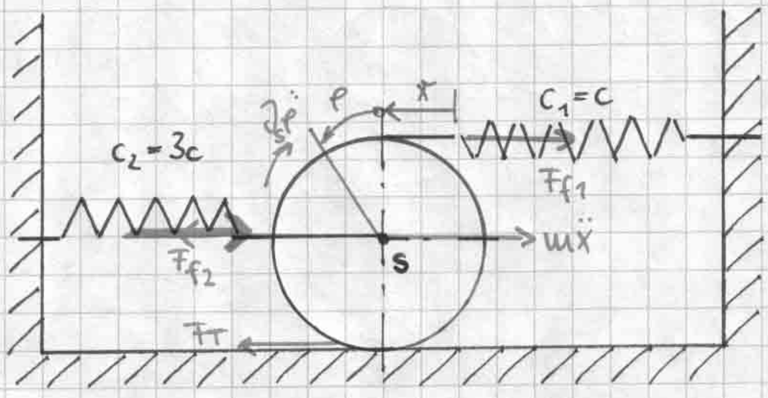
Aufg. 5.9.

geg.: c, r, m

ges.: a) Bewegungsglg. für kleine φ

b) Eigenkreisfrequenz ω_0

Skizze im ausgelenkten Zustand:



$F_{f1} = c_1 \cdot (x + r\varphi)$

$F_{f2} = c_2 \cdot x$

$\overset{\curvearrowleft}{S}$: $J_S \ddot{\varphi} + c_1(x + r\varphi)r + F_T \cdot r = 0$

$\rightarrow$: $m\ddot{x} + c_2 \cdot x + c_1(x + r\varphi) - F_T = 0$

mit $x = r\varphi$, $c_2 = 3c$, $c_1 = c$, $J_S = \frac{m}{2} r^2$

$m r \ddot{\varphi} + 3c \cdot r\varphi + 2c r\varphi - F_T = 0$

$F_T = m r \ddot{\varphi} + 5 c r \varphi = 0$

$\frac{m}{2} r^2 \ddot{\varphi} + 2 c r^2 \varphi + m r^2 \ddot{\varphi} + 5 c r^2 \varphi = 0$

$\frac{3}{2} m r^2 \ddot{\varphi} + 7 r^2 c \cdot \varphi = 0$

$\ddot{\varphi} + \frac{2 \cdot 7 r^2 c}{3 m r^2} \cdot \varphi = 0$

$\ddot{\varphi} + \frac{14 c}{3 m} \cdot \varphi = 0$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{14 c}{3 m}}$

Aufg. 5.3.

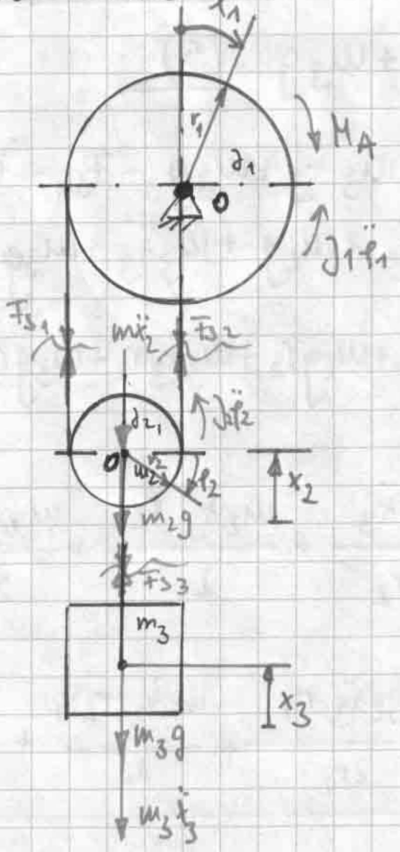
geg.: $J_1, r_1, J_2, m_2, r_2 = \frac{r_1}{2}, m_3, g, \tau$

ges.: 1) Bewegungsglg. für x_3

2) $M_{A\min}$, damit Bewegung mit konst. Beschw. erfolgt

3) $s(\tau)$ für m_3 bei $M_A = 2M_{A\min}$ und Bewegung aus der Ruhe

Skizze:



freie Koord.: $\varphi_1, \varphi_2, x_2, x_3$

ZB: $x_3 = x_2$

$r_1\varphi_1 = x_2 + r_2\varphi_2$

$x_2 = r_2\varphi_2$

Freiheitsgrad: $f = 1$

gen. Koord: $q = x_3$

Antrieb: $\curvearrowleft 0: \; J_1\ddot{\varphi}_1 - M_A + F_{S_1}\cdot r_1 = 0$

Masse m_2: $\curvearrowleft 0: \; J_2\ddot{\varphi}_2 + F_{S_2}\cdot r_2 \mp F_{S_1}\cdot r_2 = 0$

$\downarrow: \; m_2\ddot{x}_2 + m_2 g + F_{S_3} - F_{S_1} - F_{S_2} = 0$

Masse m_3: $\downarrow: \; m_3\ddot{x}_3 + m_3 g - F_{S_3} = 0$

$\rightsquigarrow \ddot{\varphi}_1: \; x_3 = x_2 = r_2\varphi_2 = \frac{1}{2}r_1\varphi_1 \quad \curvearrowright \quad \underline{\ddot{\varphi}_1 = \frac{2\ddot{x}_3}{r_1}}$

$\rightsquigarrow \ddot{\varphi}_2: \; x_3 = x_2 = r_2\varphi_2 \quad \curvearrowright \quad \underline{\ddot{\varphi}_2 = \frac{\ddot{x}_3}{r_2}}$

$\rightsquigarrow \ddot{x}_2: \; x_3 = x_2 \quad \curvearrowright \quad \underline{\ddot{x}_2 = \ddot{x}_3}$

$$\rightsquigarrow J_1 \cdot \frac{2\ddot{x}_3}{r_1} - M_A + F_{S_1} \cdot r_1 = 0 \quad \underline{(1)}$$

$$J_2 \cdot \frac{\ddot{x}_3}{r_2} + F_{S_2} \cdot r_2 - F_{S_1} r_2 = 0 \quad \underline{(2)}$$

$$m_2 \ddot{x}_3 + m_2 g + F_{S_3} - F_{S_1} - F_{S_2} = 0 \quad \underline{(3)}$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g - F_{S_3} = 0 \quad \underline{(4)}$$

---

aus (4): $F_{S_3} = m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g \quad \underline{(5)}$

(5) in (3): $m_2 \ddot{x}_3 + m_2 g + m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g - F_{S_1} - F_{S_2} = 0 \quad \underline{(6)}$

(6) nach F_{S_2}: $F_{S_2} = m_2 \ddot{x}_3 + m_2 g + m_3 \ddot{x}_3 + m_3 g - F_{S_1} \quad \underline{(7)}$

(7) in (2): $J_2 \frac{\ddot{x}_3}{r_2} + m_2 \ddot{x}_3 \cdot r_2 + m_2 g r_2 + m_3 \ddot{x}_3 r_2 + m_3 g r_2 - F_{S_1} r_2 - F_{S_1} r_2 = 0 \quad \underline{(8)}$

(8) nach F_{S_1}: $F_{S_1} = \frac{J_2 \ddot{x}_3}{2 r_2} + \frac{m_2 \ddot{x}_3 \cdot r_2}{2} + \frac{m_2 g r_2}{2} + \frac{m_3 \ddot{x}_3 r_2}{2} + \frac{m_3 g r_2}{2}$

(9) in (1): $\frac{2 J_1 \ddot{x}_3}{r_1} - M_A + \frac{J_2 \ddot{x}_3 r_1}{2 r_2} + \frac{m_2 \ddot{x}_3 \cdot r_2 r_1}{2} + \frac{m_2 g r_2 r_1}{2} + \frac{m_3 \ddot{x}_3 r_2 r_1}{2} + \frac{m_3 g}{2}$

$= 0$

mit $r_2 = \frac{r_1}{2}$: $\frac{2 J_1 \ddot{x}_3}{r_1} - M_A + \frac{J_2 \ddot{x}_3}{}$

$\vdots$

$$\ddot{x}_3 = \frac{2 \frac{M_A}{r_1} - (m_2 + m_3) \cdot g}{\left[m_2 + m_3 + \frac{4 J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} \right]} = k$$

zu2) $\ddot{x}_3 = 0 \curvearrowright$ mit $M_A = M_{A\min}$

$$\Rightarrow M_{A\min} = \frac{(m_2 + m_3) \cdot g \cdot r_1}{2}$$

zu3) $\ddot{x}_3 = k$

$\curvearrowright x_3 = \frac{k}{2} t^2 + c_1 t + c_2$ AB: $t = 0$; $x_3 = 0$; $\dot{x}_3 = 0$

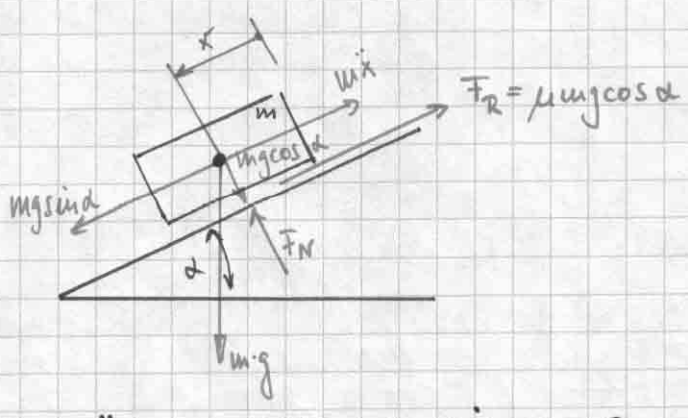
$\rightsquigarrow c_1 = c_2 = 0$

$$x_3 = \frac{k}{2} t^2 \quad \text{mit } t = \tau$$

Aufg. 5.4.

geg.: $\alpha, m, g, \quad v = \text{konst.}$ ges.: μ

Skizze:



$$\nearrow: \; m\ddot{x} + \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0 \qquad |:m$$

$$\ddot{x} + \mu g\cos\alpha - g\sin\alpha = 0$$

da $v = \dot{x} = \text{konst}$ $\curvearrowright$ $\ddot{x} = 0$ $\curvearrowright$

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\underline{\underline{\mu = \tan\alpha}}$$

Aufg. 5.5.

geg.: $m = 1\,kg$, $L = \frac{5}{\sqrt{3}}\,m$, $g = 10\,m/s^2$

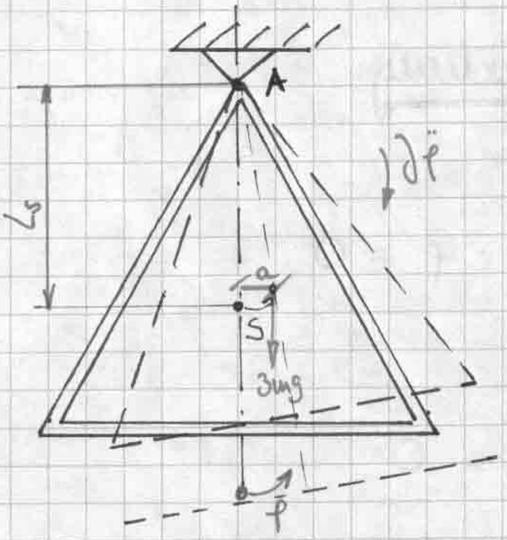
ges.: 1) Bewegungsglg. für kleine φ

2) J_A

3) Eigenkreisfrequenz ω_0

4) Verlauf $\dot{\varphi} = f(\varphi)$

Skizze:



$a = L_S \cdot \sin\varphi \approx L_S\varphi$

Berechnung d. Lage des Schwerpunktes:

Schwerpunktsatz: $m\vec{r}_S = \sum m_i \vec{r}_{Si}$

$$\rightsquigarrow 3\cancel{m} \cdot L_S = \cancel{m} \cdot L\cos 30° + \cancel{2m} \cdot \frac{L}{\cancel{2}} \cdot \cos 30°$$

$$L_S = \frac{2}{3} L \cos 30°$$

$$L_S = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L$$

$$L_S = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Bewegungsgleichung: $A)$: $J\ddot{\varphi} + 3mg \cdot L_S\,\varphi = 0$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3mg \cdot L_S}{J} \cdot \varphi = 0$$

mit $L_S = \frac{L}{\sqrt{3}}$ $\curvearrowright$ $\ddot{\varphi} + \frac{3mgL}{\sqrt{3}J} \cdot \varphi = 0$

Berechnung von J_A:

$$J_A = 3 \cdot \frac{m \cdot L^2}{12} + m \cdot (L\cos 30^\circ)^2 + 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} mL^2 + \frac{3}{4} mL^2 + \frac{1}{2} mL^2$$

$$= \frac{3}{2} mL^2$$

→ **für die Bewegungsgleichung:**

$$\ddot{\varphi} + \frac{\cancel{3} \cancel{m} gL \cdot 2}{\cancel{3} \cancel{m} L^2 \sqrt{3}} \cdot \varphi = 0$$

$$\dot{\varphi} + \frac{2g}{\sqrt{3} L} \cdot \varphi = 0$$

Eigenkreisfrequenz ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{g}{L}}$$

Verlauf $\dot{\varphi} = f(\varphi)$

Ansatz: harmonische Schwingung

$$\varphi = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$
$$\dot{\varphi} = A\omega_0 \cos \omega_0 t - B\omega_0 \sin \omega_0 t$$
$$\ddot{\varphi} = -A\omega_0^2 \sin \omega_0 t - B\omega_0^2 \cos \omega_0 t$$