Differentialrechnung für Fkt. mit mehreren Veränderl. (ab S.128)

part. Ableitg: $f(x,y) = x^2 + y^2 \;->\; \frac{\delta f}{\delta x} = 2x$ und $\frac{\delta f}{\delta y} = 2y$

Höhere partielle Ableitungen $f_{xy}(x,y) = \frac{\delta f}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$

Satz von Schwarz: Falls f k-mal stetig partiell diff' ist, so ist Reihenfolge der Differentiationen in den gemischten Ableitungen vertauschbar, z.B. gilt $f_{xy} = f_{yx}$,falls f 2-mal stetig diff' ist

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\underline{x}_0) \\ \dots \\ f_{x_n}(\underline{x}_0) \end{pmatrix} = gradf(\underline{x}_0) \qquad \nabla f(x,y,z) = f'(x,y,z)^T = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \dots \\ \frac{\delta f}{\delta z} \end{pmatrix}$$

für Grenzwerttest : $y = x \cdot t$ (Geradenschar)

Richtungsableitung (S.130)

In dieser Richtung wächst Funktion (lokal) am stärksten. Gradientenrichtung $\nabla f(x)$ als Richtung mit stärkstem Anstieg von f in Punkt $\underline{x}$.

Taylorsche Formel (S.133)

Für n=1 $:= f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + 0.5 f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2$

Pkt. k=0: $f(x,y) = f(x,y)$

lin. k=1: $f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{x_0} + (y-y_0)\left.\frac{\delta f}{\delta y}\right|_{y_0} = f(\underline{x}_0) + \nabla f(x_0)^T \cdot (\underline{x}-\underline{x}_0)$

*quadr.*k=2 $:= f(x,y) = f(\underline{x}_0) + \underbrace{\nabla f(\underline{x}_0)^T \cdot (\underline{x}-\underline{x}_0)}_{|\dots\ \dots| \cdot \left|\begin{smallmatrix}\dots\\\dots\end{smallmatrix}\right|} + \underbrace{0.5(\underline{x}-\underline{x}_0)^T \cdot f''(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0)}_{0.5\cdot|\dots\ \dots| \cdot \left|\begin{smallmatrix}\dots & \dots\\\dots & \dots\end{smallmatrix}\right| \cdot \left|\begin{smallmatrix}\dots\\\dots\end{smallmatrix}\right|}$

$$= \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)$$

$$= 0{,}5\cdot\begin{pmatrix} x-x_0; & y-y_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_{xx}(\underline{x}_0;\underline{y}_0) & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$= 0{,}5\cdot\begin{pmatrix} x-x_0; & y-y_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_{xx}\cdot(x-x_0) + f_{xy}\cdot(y-y_0) \\ f_{yx}\cdot(x-x_0) + f_{yy}\cdot(y-y_0) \end{pmatrix}$$

$$= 0{,}5\left[f_{xx}(x-x_0)^2 + f_{xy}(y-y_0)(x-x_0) + f_{yx}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2\right]$$

Skalar- und Vektorfelder **(Merziger S.144 ff)**

- **Nabla-Operator (S.146)** grad f nur von Skalar
  grad f ist dann ein Vektor

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \rightarrow \text{allg: } \nabla := \left(\frac{\delta}{\delta x_i}\right) \qquad \text{Gradient: } gradf = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \\ \frac{\delta f}{\delta z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \bullet g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_i} \underline{g}_i(\underline{x}) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x_1} \\ \dots \\ \frac{\delta}{\delta x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \dots \\ g_n(x) \end{pmatrix} \quad g_i\text{…Vektorfeld}$$

Laplace Operator Δ (S.146)

$\Delta f(\underline{x}) = f_{xx}(\underline{x}) + f_{yy}(\underline{x}) + f_{zz}(\underline{x})$ es gilt $\Delta f = div(gradf)$

- **Divergenz (S.145)** $div\,\vec{g} := \nabla \cdot \vec{g}$ ist Skalarfeld (von Vektorfeld),beschreibt Quelldichte v g

$$div\,\vec{g} := \nabla \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = \frac{\delta g_x}{\delta x} + \frac{\delta g_y}{\delta y} + \frac{\delta g_z}{\delta z}$$

, *quellfrei* für $div\,\vec{g} := \nabla \cdot \vec{g} = 0$

- **Rotation (S.145)** $rot\,\vec{g} := \nabla \times \vec{g}$ ist ein Vektorfeld von einem Vektorfeld

$$rot\,\vec{g} := \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta g_3}{\delta y} - \frac{\delta g_2}{\delta z} \\ \frac{\delta g_1}{\delta z} - \frac{\delta g_3}{\delta x} \\ \frac{\delta g_2}{\delta x} - \frac{\delta g_1}{\delta y} \end{pmatrix}$$

, *wirbelfrei* für $rot\,\vec{g} := 0$

Kettenregel (S.131) $(f \circ g)(\underline{u}) = F(\underline{u}) = f(\underline{g}(\underline{u}))$

z.B. $\dot{z} = f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y}$

Ableitung: $\frac{\delta F(\underline{u})}{\delta u_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta F(\underline{u})}{\delta x_i} \cdot \frac{\delta g_i}{\delta u_i} \rightarrow$ Bsp $\left.\begin{matrix} g(\underline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - e^{u_3}\ (= x_1) \\ u_1 + u_2^2\ (= x_2) \end{pmatrix} \\ f(\underline{x}) = x_1 \sin(x_1 x_2) \end{matrix}\right\} \frac{\delta F(\underline{u})}{\delta u_1} = \frac{\delta f(\underline{x})}{\delta x_1} \cdot \frac{\delta x_1 (= \delta g_1)}{\delta u_1} + \frac{\delta f(\underline{x})}{\delta x_2} \cdot \frac{\delta g_2}{\delta u_1}$ nach dem ableiten für x_1 und x_2 die Fkt. einsetzen!

Implizite Funktion (S.131) $F(x,y) = 0$

Abltg: $y'(x) = -\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}$ m. Anst (x_0,y_0) $m = y'(x) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$

$$y''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^{\,2} - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^{\,2}}{F_y^{\,3}}$$

implizite Fkt. $\frac{\delta \underline{F}}{\delta \underline{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta y_1} & \dots & \frac{\delta F_1}{\delta y_m} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\delta F_m}{\delta y_1} & \dots & \frac{\delta F_m}{\delta y_m} \end{pmatrix}$ → ***Funktionalmatrix***

regulär für det( ) $\neq 0$) → auflösen $\frac{\partial \underline{F}(x_0,y_0)}{\partial \underline{y}} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \partial F^0{}_1 / \partial x_1 \\ \partial F^0{}_2 / \partial x_2 \end{pmatrix}$ und

ausmultiplizieren (2 Glg. 2 Unbek. → z1, z2 errechnen

Extrema von Funktionen mit mehreren Variablen (S.132)

a) stationäre Punkte berechnen: $\nabla f(\underline{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \end{pmatrix} = 0$

führt zu mehreren **Pkt.** (die Ableitungen lösen), aber die Punkte nur über die Ableitungen ermitteln**!!!** (Bsp siehe Merziger)
z.B. aus erster abgel.Gl. : $x_1=0$ und $y_1=2$ führt beim Einsetzen in 2.Gleichung zu: mit $x_1=0$ zu $y_1=3$ und $y_1=3$ und
$y_1=2$ zu $x_2=3$ und $x_2=-3$ damit vier Punkte und somit 4 zu bestimmende Extrema!

b) Hesse-Matrix bestimmen: $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ → und **Pkt.** einsetzen

EW: $\det\begin{vmatrix} f_{xx}-\lambda & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ***oder*** $\det\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 0$

c) Extremwerte: $\lambda_1,\lambda_2 > 0$ → rel. Min. ***oder*** det()>0 & f_{xx}>0 rel.Min.
$\lambda_1,\lambda_2 < 0$ → rel. Max. ***oder*** det()>0 & f_{xx}<0 rel.Max.
$\lambda_1,\lambda_2 = \pm$ →Satt Pkt. ***oder*** det()<0 Satt Pkt.

d) Extrempunkte ausrechnen,d.h. x,y in Ausgangsgl. → z

Extrema mit Nebenbedingungen - Langrange (S.133)

Gesucht: Extrema von $f(x,y)$ für jene (x,y), für die $v(x,y) = 0$ ist.

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow$ min bei $h(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$

Lagrange: $L(\underline{x},\underline{h}) = \sqrt{x^2+y^2} + \lambda\,(x^2+y^2+xy-1)$ wird extremal, wenn Wurzelinhalt extremal
$L(\underline{x},\underline{h}) = x^2 + y^2 + \lambda\,(x^2+y^2+xy-1)$

Ableitg.: $L_{\underline{x}}(\underline{x},\underline{\lambda}) = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + \lambda(2x+y) \\ 2y + \lambda(2y+x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $L_{\underline{\lambda}}(\underline{x},\underline{\lambda}) = x^2+y^2+xy-1 = 0$

damit 3Gl. & 3 Unbek.
$0 = 2x + \lambda(2x+y)$
$0 = 2y + \lambda(2y+x)$
$0 = x^2 + y^2 + xy - 1$

$\lambda = -\frac{2x}{2x+y}$, $\lambda = -\frac{2y}{2y+x}$

$\lambda = \lambda \rightarrow x = y$ und x=-y damit in L_λ
$x = y \rightarrow x_1 = \sqrt{1/3}; x_2 = -\sqrt{1/3}$
$x = -y \rightarrow x_3 = 1;\ x_4 = -1$

somit:
$P_{E1}{}^* = \begin{pmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{1/3} \end{pmatrix}$; λ_{11}^*=(-2/3) & $P_{E2}^* = \begin{pmatrix} -\sqrt{1/3} \\ -\sqrt{1/3} \end{pmatrix}$; λ_{12}^*=(-2/3)
$P_{E1}{}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; λ_{21}^*=(-2/3) & $P_{E2}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; λ_{22}^*=(-2/3)

$L_{\underline{xx}}(\underline{x},\underline{\lambda}) = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & \lambda \\ \lambda & 2+2\lambda \end{pmatrix}$ & $\nabla h(P_E) = \begin{pmatrix} h_x(P_E) \\ h_y(P_E) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \end{pmatrix}$ bestimmen

hinreichende Optimalitätsbedingung **2.Ordnung:**

$(w_1 w_2)\bullet\begin{pmatrix} L_{xx} L_{xy} \\ L_{yx} L_{yy} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ > 0 *Min.* / < 0 Max. **und** $(w_1\ \ w_2)\bullet\nabla h(P_E) \overset{!}{=} 0$ ab hier mit Punkten P_E rechnen!

Bsp.P_{E1} mit λ_{11} (dieser Schritt muss für alle Punkte ausgeführt werden)

→ $(w_1 w_2)\bullet\begin{pmatrix} 2+2\cdot -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2+2\cdot -2/3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (w_1 w_2)\bullet\begin{pmatrix} 2/3\cdot w_1 - 2/3\cdot w_2 \\ -2/3\cdot w_1 + 2/3\cdot w_2 \end{pmatrix} = \underline{2/3\cdot(w_1^2 + w_2^2)}$

→ $(w_1\ \ w_2)\bullet\nabla h(P_{E1}) = (w_1\ \ w_2)\bullet\begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \end{pmatrix} = (w_1\ \ w_2)\bullet\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{3}\cdot(w_1\ \ w_2) = 0$

damit führt $\sqrt{3}\cdot(w_1\ \ w_2) = 0$ zu $\underline{w_1 = -w_2}$

→ mit $w_1=-w_2$ in $\underline{2/3\cdot(w_1^2+w_2^2)}$ führt auf Ausdruck: $\frac{8}{3}w_1^2$ das ist >0 (rel Minimun bei P_{1E})

bei mehreren NB $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = z + \lambda_1 g(x,y) + \lambda_2 h(x,y)$ → $L_x=L_y=L_z=L_{\lambda1}=L_{\lambda2}=0$! → λ_2 in Abhängigk. v. λ_1
aus L_z → λ_2 in L_x und L_y → $\lambda_2 = \lambda_1 \Rightarrow y(x)$… → y(x) in $L_{\lambda1} \Rightarrow$z(x) → y(x) und z(x) in $L_{\lambda2}$ → x_E´s
(sobald f(x,y,z) wird aus allen 2x2 Matrizen 3x3 !!! und es muss mit (w_1 w_2 w_3) gerechnet werden!!!!

Koordinatentransformationen (S.

a) Polarkoordinaten **D=r**

$x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$ mit $r \ge 0$, $\varphi \in [0;2\pi]$

$f_x^2 + f_y^2 = \omega_r^2 + 1/r^2\cdot\omega_\varphi^2$

$f_{xx} + f_{yy} = \omega_{rr} + 1/r\cdot\omega_r + 1/r^2\cdot\omega_{\varphi\varphi}$

b) Zylinderkoordinaten **D=r**

$x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$, $z = z$ mit $r \ge 0$, $\varphi \in [0;2\pi]$

$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \omega_{rr} + 1/r\cdot\omega_r + 1/r^2\cdot\omega_{\varphi\varphi} + \omega_{zz}$

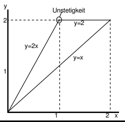
c) Kugelkoordinaten **$D=r^2\sin\vartheta$**

$x = r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi$, $z = r\cdot\cos\vartheta$ mit $\varphi \in [0;2\pi]$, $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Zweifachintegrale

Flächeninhalt $J = \iint_B f(x,y)\,db = \iint_{B_1} f(x,y)\,dy\,dx + \iint_{B_2} f(x,y)\,dy\,dx$



B_1,B_2 bei Unstetigkeiten!

Berechnung der Flächenelemente in anderen Koordinaten

$J = \iint_B f(x,y)\,dy\,dx = J = \iint_{B^*} f(x(u,v),y(u,v))\cdot D(u,v)\,du\,dv$ mit $x(r,\varphi) = r\cdot\cos\varphi$, $y(r,\varphi) = r\cdot\sin\varphi$

$\rightarrow D = \det\begin{vmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix} = D(r,\varphi) = r$

Dreifachintegrale

Zylinderkoord.

$\iiint f(r,\varphi,z)\cdot r\cdot dr\,d\varphi\,dz$

I) Volumenberechnung: $V_Q = \iiint_Q 1\cdot dq$

II) Masse eines inhom. Körpers: $m_Q = \iiint_Q \rho(x,y,z)\cdot dx\,dy\,dz$

III) Schwerpunkt: $x_S = \frac{1}{m}\iiint_Q x\cdot\rho(x,y,z)\cdot dx\,dy\,dz$

IV)Trägheitsmoment: $I_x = \iiint_Q (y^2+z^2)\cdot\rho(x,y,z)\cdot dx\,dy\,dz$

ohne **ρ bei geom**. Trägheitsmoment

Berechnung der Volumenenelemente in anderen Koordinaten

$J = \iiint_B f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz = \iiint_{B^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w))\cdot D(u,v,w)\,du\,dv\,dw$

Indizierung in bel.Reihenfolge, da für D, egal nach welcher Kombination von u,v,w das gleiche Ergebnis entsteht !!!

$\det \underline{A} = \det\left(\underline{A}^T\right)$ =an Hautdiagonale gespiegelt: somit kann y_u mit x_v und … auch vertauscht sein

z.B Zyl-Koord. mit $\begin{array}{l} x(r,\varphi,z) = r\cdot\cos\varphi \\ y(r,\varphi,z) = r\cdot\sin\varphi \\ z(r,\varphi,z) = z\end{array}$ dabei ist $\begin{array}{l} u = r \\ v = \varphi \\ w = z\end{array}$ mit Funktionaldet: $D = Betrag(\det\begin{vmatrix} x_u(u,v,w) & x_v(u,v,w) & x_w(u,v,w) \\ y_u(u,v,w) & y_v(u,v,w) & y_w(u,v,w) \\ z_u(u,v,w) & z_v(u,v,w) & z_w(u,v,w)\end{vmatrix}) = Betrag(\det\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix})$ =**r**

Lineare Optimierung

- Variablen suchen (x1,x2)
- Zielfunktion soll extremal werden (=c)
- Nebenbedingungen in Diagramm einzeichnen
- Zielfunktion in Maximum schieben

Stichproben:

$\overline{x}$ (Erwartungswert μ)

$E(x) = \mu = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i\cdot x_i$

Varianz σ^2

$D^2(x) = \sigma^2 = \frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$

Standardabweichung σ

$\sigma = \sqrt{\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$

Zusätzliches

$P(|X| > 4) = P(X > 4) + P(X < -4)$

$P(|X-3{,}5| > 2) = P(X < 1{,}5) + P(X > 5{,}5)$

$P(|X-1| > 6) = P(X < -5) + P(X > 7)$

$P(X < \alpha) = 0{,}7584 \rightarrow 0{,}7584 = \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$

$\rightarrow \frac{\alpha-\mu}{\sigma} = 0.70 \rightarrow \alpha = 0{,}70\cdot\sigma+\mu$

$P(0 < X < 2) = P(X < 2) - P(X < 0)$

=große Fläche von kleiner abziehen

$P(|X-\mu| < \alpha)$

$= P(X < \mu+\alpha) - P(X < \mu-\alpha)$

=große Fläche von kleiner abziehen

$E(ax+by) = aE(x) + bE(y)$

$D^2(x+y) = D^2(x) + D^2(y)$

$D^2(ax+by) = a^2D^2(x) + b^2D^2(y)$

WSK für Überlaufen (μ=0)

P(Überlaufen)=$P(X_3>0)=1-P(X_3<0)$

$=1-\Phi\left(\frac{0-(\Delta V)}{\sigma_{neu}}\right)$

ΔV =Flüssigkeitsvol-Flaschenvol. damit kleiner als 0!

Normalverteilung:

$P(X<x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Y<y) = \Phi(y)$ (WSK,dass Zufalswert X kleiner ist als *Vorgabewert x*)

$\Phi(-y) = 1-\Phi(y)$ und $P(X > x) = 1 - P(X < x)$

-- mehere Wahrscheinlichkeiten werden addiert!

-- darauf Achten, das nur die Form (X<x)definiert ist

Aufgabe: Kondensatoren mit Erwartungswert $\mu = 200$ und der Varianz $\sigma^2 = 25$ damit ist $\sigma = 5$

Frage: WSK dass Kondensator fehlerhaft ist, wenn die Kapazität

I) mindesten 198 betragen muss

$P(X<198) = P\left(\frac{X-200}{5} < \frac{198-200}{5}\right) = P(Y < -\frac{2}{5}) = \Phi\left(-\frac{2}{5}\right) = 1-\Phi\left(\frac{2}{5}\right)$

$\underline{P(X<198) = 0{,}3446}$

II) höchstens 202 betragen darf (d.h. Ausschuss für X>202!!!) aber Achtung „> als“ ist nicht durch Formel definiert, daher umformen zu „< als“

$P(X>202) = 1-P(X<202) = 1-P\left(\frac{X-200}{5} < \frac{202-200}{5}\right) = 1-P(Y<\frac{2}{5}) = 1-\Phi\left(\frac{2}{5}\right)$

$\underline{P(X>202) = 0{,}3446}$

III) maximal um 5 vom Sollwert 200 abweichen darf

$P(\text{Ausschuss}) = P(X<195) + P(X>205) = 2\cdot P(X<195) = P\left(\frac{X-200}{5} < \frac{195-200}{5}\right)$

$P(\text{Ausschuss}) = 2\cdot P(Y<-1) = 2\cdot\Phi(-1) = 2\cdot\left[1-\Phi(1)\right]$

$\underline{P(\text{Ausschuss}) = 0{,}3174}$

IV) Toleranzgrenzen 200-α und 200+α, damit Ausfallwahrscheinlichkeit $P \le 0{,}001$?

Ausschuss entseht, wenn

Betrag von -bel.Wert X minus Erwartungswert μ- über der Grenze α liegt

$P(Ausschuss) = 0{,}001 = P(|X-\mu| > \alpha) = P(X > 200+\alpha) + P(X < 200-\alpha)$

$P(Ausschuss) = 0{,}001 = 2\cdot P(X < 200-\alpha)$

$= 0{,}0005 = P(X<200-\alpha) = P\left(\frac{X-200}{5} < \frac{200-\alpha-200}{5}\right)$

$= 0{,}0005 = P(Y < -\alpha/5) = \Phi(-\alpha/5)$

$= 0{,}0005 = 1-\Phi(\alpha/5)$

$\Phi(\alpha/5) = 0{,}9995$

$\alpha/5 = 3{,}29$

$\boxed{\alpha = 16{,}45} \rightarrow 183{,}55...216{,}45$

<u>Integration der ***inhomogenen*** lin. DGL</u>

$y' + f(x)\cdot y = g(x)$

Variation der Konstanten

(1) Integration homogene DGL (siehe oben) $y' + f(x)\cdot y = 0$

(2) inhomogene DGL Ansatz: $y_p = K(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}$ (C→K(x))

1. Ableitung: $y' = K'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} + K(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}\cdot\left[-f(x)\right]$

2. y und y' in $y' + f(x)\cdot y = g(x)$ einsetzen

…

$g(x) = K'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}$

3. $K'(x) = g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}$

$\int K'(x)dx = \int g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}dx$

$K(x) = \int g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}dx + C$

4. $y_p = \left(\int g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}dx + C\right)\cdot e^{-\int f(x)dx}$

<u>Integration inhomog. lin. DGL (Bestimmung von y_p)</u>

wie bei DGL 1. Ordnung über Ansätze für Störfunktionen über Koeffz-vgl. Konstanten bestimmen und in Ansatzfunktion einsetzen → y_p, aber Achtung bei

$g(x) = A\cdot e^{bx}$ und $y_h = C\cdot e^{-ax}$

$y_p = C\cdot e^{bx}$ für $b \neq -a$

$y_p = C\cdot x\cdot e^{bx}$ für $b = -a$

Lösungsaufbau: $y_h = C_1\cdot y_1 + C_2\cdot y_2$

Fallunterscheidung

(1) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow y_h = C_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x} + C_2\cdot e^{\lambda_2\cdot x}$

(2) $\lambda_1 = \lambda_2 \rightarrow y_h = \left(C_1 x + C_2\right)\cdot e^{\lambda\cdot x}$

(3) $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\omega \rightarrow y_h = e^{\alpha\cdot x}\left[C_1\sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x)\right]$

Lineare DGL 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten (aufsuchen partikuläresg)

$y' + a\cdot y = g(x)$

allg. Lsg. $y = y_h + y_p$

<u>Integration homog. lin. DGL</u>

$y' + a\cdot y = 0$ lösen TDV

$\underline{y_h = C\cdot e^{-ax}}$ → allgemein:

$\underline{y = C\cdot e^{\lambda\cdot x}}$ und $\underline{y' = C\cdot\lambda\cdot e^{\lambda\cdot x}}$ in $\underline{y' + a\cdot y = 0}$

damit: $C\cdot e^{\lambda x}\cdot(\lambda + a) = 0 \rightarrow (\lambda + a)$

ist die **charakteristische Gleichung**

$\lambda = -a \rightarrow \underline{y_h = C\cdot e^{-ax}}$

Linienintegrale (S.149)

Arbeit : $W = F \cdot s$, falls F=const. + in Wegrichtung

$W = \vec{F} \bullet \vec{s}$, falls F=const. und Wegrichtung beliebig

$W = \int_C \vec{F}\left(\vec{s}(t)\right) \bullet d\vec{s} = \int_C \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$, falls F + Wegrichtung beliebig

- „C"=Weg A nach B: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{pmatrix}$ bilden + einsetzen

[$\vec{F}\left(\vec{s}(t)\right)$] bzw. ableiten und einsetzen [$d\vec{s}$]

-wegunabhängig, wenn: $\boxed{rot\left(\vec{F}\right) = \vec{0}}$

→wenn Kraftfeld wirbelfrei→so kann Berechnung der Arbeit auch über Potentialfeld erfolgen→ **S.148 →** **W=U(B)-U(A)**
(von Punkt A nach Punkt B)

$\int_A^B \left((x+y+z)dx + (3x+2y-z)dy + (5x-y+z)dz \right)$ A(0;0;0) und B(1;1;1)

$\vec{F} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 3x+2y-z \\ 5x-y+z \end{pmatrix}$ **und** $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ **und** $\frac{d\vec{s}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 = x \\ 1 = y \\ 1 = z \end{pmatrix} dt$ mit 0<t<1

$\vec{F}\left(\vec{s}(t)\right) = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \\ 5t \end{pmatrix} \to W = \int_C F(s(t)) \cdot \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \\ 5t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (3t+4t+5t)\,dt = \int_0^1 (12t)\,dt = 6t^2\Big|_0^1 = \underline{6}$

A: $4=x^2+y^2+z^2$ Kugel mit R=4 ; E: $z \geq \sqrt{3}$ → Schatten = Kreis mit r=1! (z einsetzen→Kreisgl.) →

$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \underline{\underline{ZK}} \begin{pmatrix} 1\cdot\cos(t) \\ 1\cdot\sin(t) \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{s} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \cdot x \cdot z^2 \\ x \end{pmatrix} \to \vec{f}\left(\vec{s}(t)\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \cdot 1 \cdot \cos(t) \cdot \sqrt{3}^2 \\ 1 \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \to \oint_c = \underline{\underline{\int_{t=0}^{2\pi} \vec{f}\left(\vec{s}(t)\right) \bullet d\vec{s}}}$

Exakte DGL (S.155)

(1) $y^3y'+x^3+x^2yy'+xy^2=0$ mit $y'=\frac{dy}{dx}$ → $(x^3+xy^2)dx+(y^3+x^2y)dy = 0 = f1dx+f2dy$ → $\vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3+xy^2 \\ y^3+x^2y \end{pmatrix}$

(2) Integrabilitätsbedingung (IB) erfüllt ? $\boxed{rot\left(\vec{F}\right) = \vec{0}}$ bzw. $\boxed{\frac{\delta f_1}{\delta y} = \frac{\delta f_2}{\delta x} \; ; \; \frac{\delta f_1}{\delta z} = \frac{\delta f_3}{\delta x} \; ; \; \frac{\delta f_2}{\delta z} = \frac{\delta f_3}{\delta y}}$

JA (3) | **NEIN**→integr. Faktor (2')

$I \quad \int f_1 dx + c(y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y)$

$II \quad \int f_2 dy + c(x) = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + c(x)$

$\Rightarrow U = \underbrace{\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4}_{\text{implizite Lsg durch Abgleich}} = K = const.$

- man erhält die Potentialfkt. U und könnte jetzt **W=U(B)-U(A)** berechnen
- durch umstellen nach **y** erhält man explizite Lösung:
- $x^2y^2 + 2x^4 + y^4 = \tilde{K} = (x^2+y^2)^2$
- $\sqrt{\tilde{K}} = \tilde{\tilde{K}} = x^2 + y^2 \to y = \pm\sqrt{\tilde{\tilde{K}} - x^2}$ **exakte DGL in expliziter Form**

Bsp: $(1-x^2)y' = xy + \frac{x}{y} = \left(-xy - \frac{x}{y}\right)dx + \left(1-x^2\right)dy \to \vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy-x/y \\ 1-x^2 \end{pmatrix}$ $\boxed{f_{1y}=-x+x/y^2 \neq f_{2x}=-2x}$

1.Fall	2.Fall
$bei\,\mu(x): \frac{f1_y - f2_x}{f2} = h(x)$ geht hier nicht! da Abhängigkeit von x **und** y nach dem einsetzen; $\mu(x) = e^{\int h(x)dx}$	$bei\,\mu(y): \frac{f2_x - f1_y}{f1} = h(y) = \frac{1}{y}$ nur abhängig von **y** !!!; $\mu(y) = e^{\int h(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln\lvert y \rvert} = \underline{\underline{+y}}$

(3) **exakte DGL=alteDGL*µ** → $\left(-xy^2-x\right)dx + \left(y-x^2y\right)dy$ → IB prüfen →U berechnen !

Bereichsintegrale

- $\iint_B f(x,y)db = \int_x \int_y f(x,y)dydx$ → Bereich B zeichnen + Grenzen festlegen → runder Bereich→ Zyl.Koord → $\iint_B f(x,y)db \cdot r$; r=Verzerrungsfaktor **(Berechnung S.94+95)**

Oberflächenintegrale 1. Art: $z = \sqrt{2xy} \Rightarrow \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ (Verzerrungsfkt.) → Schatten bilden (B= 4<x<5 und 2<y<0,5x) für Grenzen (**S.150**) hier in x,y-Ebene

2. Art (Fluß): $\boxed{\iint_A \vec{f} \circ d\vec{0} = \iint_B \vec{f}\left(\vec{x}(u,v)\right) \circ \left(\underline{x_u} \times \underline{x_v}\right) dudv}$ mit A: $z=x^2+y^2$, 0<z<4, $\vec{f} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$, dann $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$ (Abtastvektor) in $\vec{f}$ einsetzen: $\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ (x^2+y^2)-1 \end{pmatrix}$;

$\vec{x}_x \times \vec{x}_y = \vec{dO}$ bilden; Kontrolle: $\vec{e}_z \bullet \vec{dO} < 0$ (aus Aufgabe), sonst $-dO=-\underline{x_u} \times \underline{x_v}$!!; Integral ber., Grenzen aus z=… und Schatten; ab hier ggf. mit ZK.: x=r*cos(p), y=r*sin(p), z=z → Funktion UND Grenzen (meist: r=0…Radius + φ=0...2π)! (ACHTUNG: Verzerrungsfaktor „r") ; alternativ: GIS oder SIS!!

SIS: Bsp. analog oben: $\vec{x}=\vec{x}(u;v)\underline{ZK}\begin{pmatrix} u\cdot\cos(v) \\ u\cdot\sin(v) \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$; $\vec{x}_u \times \vec{x}_v = d\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$; $\vec{e}_z \bullet \vec{dO} > 0$!!! ;

$rot\left(\vec{x}(u;v)\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\cdot u\cdot\cos(v) \\ -1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ → SIS $\boxed{\oiint_A \left[rot\left(\vec{f}\left(\vec{x}(u,v)\right)\right)\right] \circ \left(\underline{x_u} \times \underline{x_v}\right) dudv}$

x…Abtastvektor für FLÄCHE; Grenzen f. Integral aus Schatten

GIS: $f = \begin{pmatrix} x\cdot\sqrt{x^2+y^2} \\ xyz \\ 0 \end{pmatrix}$; $div(f) = ... \neq 0$ (nicht quellenfrei!); $A1: z=5-\frac{1}{9}\cdot(x^2+y^2)$; $A2: z=1$ und $x2+y2 \leq 36$

$GIS\,\underline{\underline{ZK}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{36}} \int_{z=1}^{5-\frac{1}{9}r^2} \left[div(f)\cdot r\right] dzdrd\varphi$ $\boxed{\oiint_A \vec{f} \circ d\vec{0} = \iiint_V \left(div\vec{f}\right) dV}$

Lösung von DGL'n mit Potenzreihenansatz (z.B. y''-xy'-y=0)

Allg.Ansatz: $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (1 \cdot x - x_0)^k}$ $\underline{x_0}$=0 einsetzen und Potenzreihe bestimmen: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$ableiten $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n * a_n * x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n*(n-1)*a_n*x^{n-2}$

1.Ansatz ableiten (s. oben) +in DGL einsetzen für z.B. n=0…5 ***2.*** mit Koeffizientenvergleich a_n bestimmen (nur die x'e benutzen, die in nicht abgel.Gl. $y=a_0*0*x^{-2}+…+$ stecken → (wenn a_0*0=0→ a_0=c1) C_1, C_2 ***3.***Ordnen nach C, ausklammern ***4.*** ergibt allgemeine Lsg. y_{allg} ***5.*** dies ableiten ergibt $y' = C_1() + C_2()$ ***6.*** mit Anfangsbedingungen **AB** C_1,C_2 bestimmen ***7.***ergibt spezielle Lsg. **8.**e-Fkt vermuten, z.B. $e^{\left(\frac{1}{2}x^2\right)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 + ... = \sum \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^k$; spez. Lsg.: $y_s(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!2k} \leq \left(x^2\right)^k$ //

a_k …Bildungsvorschrift x_0 …Entwicklungsstelle

unbest. Koeffizienten

$f(x) = \frac{1+x}{1+\cos(2x)}$; $=\sum a_k \cdot x^k$; Reihe f. 1+cos(2x): $K = 2 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$

→ $(1+x)=\sum a_k \cdot x^k \cdot K$ →über KoeffVergl. a_k bestimmen, dabei alle Kombinationen verwenden, einer kleineren oder genau geforderten Potenz entsprechen z.B :

$1+x = \left(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...\right) \cdot \left(2 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + ...\right)$

$1 + x = 2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2 + 2a_3x^3 + 2a_4x^4 - a_0 2x^2 - a_1 2x^3 - a_2x^4 + a_0\frac{2}{3}x^4$

Jetzt Koeff.Vgl (Linke und rechte Seite → a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 → jetzt Potenzreihe aufstellen

$f(x) = \frac{1+x}{1+\cos(2x)} = \sum a_k \cdot x^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4$ (Potenzr. Bis 4. Potenz)

Fourierreihe(S.76)

Fkt. + Integrationsgrenzen bestimmen→a_0,a_k,b_k bestimmen→in Fourierr. einsetzen

$f(x) = \frac{1}{T} \cdot x$; $T=2\pi$ → $f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot x$ → Vorfaktor: $\frac{2}{T} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot x\right) dx = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} x\,dx = \underline{1}$

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot x \cdot \cos(nx)\right) dx = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} \cdot \frac{x \cdot \sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} = \underline{0}$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot x \cdot \sin(nx)\right) dx = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} x \cdot \sin(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \cdot \frac{x \cdot \cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n}$

Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$; $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^k = s(x)$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{s(x)}{x} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k + c = \int \frac{s(x)}{x} dx \Rightarrow \frac{1}{1-x} + c = \ldots \Rightarrow \underline{\frac{1}{1-x^2} = s(x)}$

Grenzwert (S.74)

$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} \right]$ Reihenentw für ln(1+x)

$= \frac{x - (x - 1/2x^2 + 1/3x^3 - \ldots)}{x(x - 1/2x^2 + 1/3x^3 - \ldots} = \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1/2 - 1/3x + \ldots)}{1 - 1/2x + 1/3x^2 + \ldots} = \lim_{x \to 0} = \frac{1}{2}$

<u>PDGL:</u> **(Bsp.)**

Geg: $U_t = a^2 \cdot U_{\varphi\varphi}$ AB: $U(\varphi, t = 0) = |\sin\varphi|$ →RB: (I) $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$; (II) $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ **1. Produktansatz (PA):** $U(\varphi,t) = \Phi(\varphi) \cdot T(t)$ → $U_t = \Phi(\varphi) \cdot \dot{T}(t)$; $U_{\varphi\varphi} = \Phi''(\varphi) \cdot T(t)$;

Ableitungen in PDGL einsetzen; TdV: $\underbrace{\frac{\dot{T}(t)}{a^2 \cdot T(t)}}_{II} = \underbrace{\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}}_{I} \Rightarrow ZEIT = ORT = -k^2$ **2.Übertragung der RB auf PA**: RB in PA einsetzen → RB1: $\Phi(0) \cdot \cancel{T(t)} = \Phi(2\pi) \cdot \cancel{T(t)}$ und RB2:

$\Phi'(0) \cdot \cancel{T(t)} = \Phi'(2\pi) \cdot \cancel{T(t)}$ **3.Lösung Eigenwertproblem für festes belieb. t:** $I: \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -k^2$ umstellen zu gewöhnl.,lin.,homog.DGL: $\Phi'' + k^2 \cdot \Phi = 0$; Lösen der DGL mit Ansatz:

$\Phi(\varphi) = e^{\lambda\varphi}$ → $\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{-k^2} \to \underline{\lambda_1 = i \cdot k}$ *und* $\underline{\lambda_2 = -i \cdot k}$ damit allg.Lösung: $\Phi(\varphi) = C_1 \cdot \cos(k \cdot \varphi) + C_2 \sin(k \cdot \varphi)$; RB einsetzen und LGS bilden→ Koeffizientendeterminante $= 0$! Lösen dieser ergibt Eigenwertgleichung $\cos(2k\pi) = 1 \Leftrightarrow 2k\pi = n \cdot 2\pi \to \underline{k_n = n}$ →Eigenfunktionen: $\Phi_n(\varphi) = C_{1n} \cdot \cos(n \cdot \varphi) + C_{2n} \cdot \sin(n \cdot \varphi)$ **4.Zwischenlösung:** Einsetzen der Eigenfkt. in PA:

$U(\varphi,t) = \sum_{u=0}^{\infty} [C_{1n} \cdot \cos(n \cdot \varphi) + C_{2n} \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \cdot T(\varphi)$ **5.Lösung der Zeitfunktion:** $II: \frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = -k^2$; siehe I ; Eigenfunktion: $T_n(t) = C_{3n} \cdot^{-n^2 a^2 t}$ einsetzen in Zwischenlösung→ allg. Lsg:

$\underline{\underline{U(\varphi,t) = [C_{1n} \cos(n \cdot \varphi) + C_{2n} \sin(n \cdot \varphi)] \cdot C_{3n} \cdot e^{-n^2 a^2 t}}}$ mit $C_{1nu} \cdot C_{3n} = a_n$; $C_{2n} \cdot C_{3n} = b_n$; $C_{10} \cdot C_{30} = \frac{a_0}{2}$ ergibt $\underline{\underline{U(\varphi,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + b_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \cdot e^{-n^2 a^2 t}}}$ **6.Einarbeiten der AB:** $u(\varphi,0) = |\sin\varphi|$, einsetzen und $t = 0$, $\underbrace{|\sin\varphi|}_{:=f} := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + b_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \cdot e^{-n^2 a^2 t}$ (f gerade: $b_u = 0$, f ungerade: $a_u = 0$) hier: b_n=0 und T=2π; a_0, a_n, b_n ausrechnen S.76

; Ergebnisse zusammenfassen ; spezielle Lösung durch einsetzen der Koeffizienten

$u = X \cdot T$	$u = X \cdot T$
$u_t = X \cdot \dot{T}$	$u_x = X' \cdot T$
$u_{tt} = X \cdot \ddot{T}$	$u_{xx} = X'' \cdot T$

2. Bsp: Geg: $u_{tt} + 2\gamma \cdot u_t - a^2 \cdot u_{xx} = 0$ AB: $u(x,0) = 0; u_t(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right); \gamma < \frac{a \cdot \pi}{l}$ **1. Produktansatz (PA):** $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ → ; Ableitungen in PDGL einsetzen; TdV: $\underbrace{\frac{\ddot{T} + 2\gamma \cdot \dot{T}}{a^2 \cdot T}}_{II} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{I} \Rightarrow ZEIT = ORT = -k^2$ **2.Übertragung der RB auf PA**: RB in PA einsetzen → RB: (I) $X(0) = 0$; (II) $X(l) = 0$ **3.Lösung Eigenwertproblem:** $I: \frac{X''}{X} = -k^2$ umstellen zu gewöhnl.,lin.,homog.DGL: $X'' + k^2 \cdot X = 0$; Lösen der DGL mit Ansatz: $X = e^{\lambda x}$ → $\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{-k^2} \to \underline{\lambda_1 = i \cdot k}$ *und* $\underline{\lambda_2 = -i \cdot k}$ damit allg.Lösung: $X(x) = C_1 \cdot \cos(k \cdot x) + C_2 \cdot \sin(k \cdot x)$; RB einsetzen und LGS bilden→ Koeffizientendeterminante $= 0$! Lösen dieser ergibt Eigenwertgleichung

$C_2 \cdot \sin(k \cdot l) = 0 \Leftrightarrow k \cdot l = n \cdot \pi \to \underline{k_n = \frac{n \cdot \pi}{l}}$ →Eigenfunktionen: $X_n(x) = C_{2n} \cdot \sin(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x)$ **4.Zwischenlösung:** Einsetzen der Eigenfkt. in PA: $u(x,t) = X(x) + T(t) = \sum_{u=0}^{\infty} C_{2n} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l}\right) \cdot T(t)$

5.Lösung der Zeitfunktion: $II: \frac{\ddot{T} + 2\gamma \cdot \dot{T}}{a^2 \cdot T} = -k^2$ → $\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\frac{(2 \cdot \gamma)^2}{4} - \left(\frac{n \cdot \pi}{l}\right)^2 \cdot a^2}_{\text{ist immer negativ!!}}} \Rightarrow -\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{n \cdot \pi}{l}\right)^2 \cdot a^2 - \frac{(2 \cdot \gamma)^2}{4}}_{\text{jetzt immer positiv!!!} = \mu}} \cdot \sqrt{-1}$

Eigenfunktion: $T_n(t) = C_{3n} \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\mu_n \cdot t) + C_{4n} \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \sin(\mu_n \cdot t)$ **(S.161)** einsetzen in Zwischenlösung→ allg. Lsg:

$\underline{\underline{U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \cdot \left[C_{3n} \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\mu_n \cdot t) + C_{4n} \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \sin(\mu_n \cdot t)\right]}}$ mit $C_{2n} \cdot C_{3n} = a_n$; $C_{2n} \cdot C_{4n} = b_n$ → $\underline{\underline{U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{a_n \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\mu_n \cdot t) + b_n \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \sin(\mu_n \cdot t)\right\} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x\right)\right]}}$

6.Einarbeiten der AB: $u(x,0) = 0$, einsetzen und $t = 0$, $\underbrace{0}_{:=f} := \underbrace{0}_{n=0} + \underbrace{a_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)}_{n=1} + \underbrace{a_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x\right)}_{n=2} + \ldots$; a_0, a_1, a_2 ausrechnen S.76 (hier: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$); Ergebnisse zusammenfassen ; spezielle Lösung durch einsetzen der Koeffizienten→ $\underline{\underline{U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{b_n \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \sin(\mu_n \cdot t)\right\} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x\right)\right]}}$;

$\underline{\underline{u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \cdot \left[e^{-\gamma \cdot t} \cdot \mu_n \cdot \cos(\mu_n \cdot t) + (-\gamma) \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \sin(\mu_n \cdot t)\right]}}$ **7. 2. RB einsetzen**: $u_t(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)$ → einsetzen und über Koeff.-vgl. b_n bestimmen (hier $b_1 = \frac{1}{\mu}$) →

einsetzen für spezielle Lsg.: $\underline{\underline{u(x,t) = \frac{l}{\sqrt{a^2 \cdot \pi^2 \cdot \gamma^2 \cdot l^2}} \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \sin\left[\frac{1}{l \cdot \sqrt{a^2 \cdot \pi^2 \cdot \gamma^2 \cdot l^2}} \cdot t\right] \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)}}$

Partielle DGL

$z_{xy} = 2x + 2y$

$z_{xy} = 2x + 2y \quad |\int dy$

$z_x = 2xy + y^2 + C_1(x)$

$z = x^2 y + y^2 x + C_1(x) + C_2(y) = x^2 y + y^2 x + G(x) + H(y)$

Mit AB z(x,0)=x→ $x = x^2 0 + 0^2 x + G(x) + H(0)$

z(0,y)=y²→ $y^2 = 0^2 y + y^2 0 + G(0) + H(y)$

$G(x) = x - H(0) \to$ *für* $x = 0: \; G(0) = 0 - H(0)$

$H(y) = y^2 - G(0) \to$ *für* $y = 0: H(0) = 0 - G(0)$

damit $H(0) + G(0) = 0$

Spezielle Lsg.:

$z(x,y) = x^2 y + y^2 x + (x - H(0)) + y^2 - G(0))$

$\underline{z(x,y) = x^2 y + y^2 x + x + y^2}$

Partielle DGL

$z_{yy} = 2$

$z_y = 2y + C_1(x)$

$z = y^2 + C_1(x) y + C_2(x)$

mit AB:

z_y(x,0)=x→ $C_1(x) = 1$

$\underline{z = y^2 + xy + 1}$

z(x,0)=1→ $C_2(x) = 1$

Partielle DGL

$\boxed{z_{xy} + z_x = xy}$ *mit* Substitution $z_x = p(x,y)$

$p_y + p = xy$ und $p_{ges} = p_{hom} + p_{part}$

I) Lösen der homogenen DGL p_{hom}

$p_y + p = 0$ über: $\frac{dp}{dy} + p = 0$ mit $TdV: \frac{dp}{dy} = -p \to dp = pdy \to \int 1 \frac{dp}{p} = \int 1 - dy \to \ln|p| + C_1 = -y + C_2$

$\underline{p_h = C^* \cdot e^{-y}} = \boxed{C(x) \cdot e^{-y}}$

II) partikuläre Lösung p_{part} durch Var.der.Konst. (Verwenden von p_h)

$p_{part} = C(x,y) \cdot e^{-y}$ lösen: $(p_p)_y = \frac{\partial C}{\partial y} \cdot e^{-y} + C(x,y) \cdot (-e^{-y})$ und nun p_{part}=p und p_{py}=p_y in $\boxed{p_y + p = xy}$

$\left[\frac{\partial C}{\partial y} \cdot e^{-y} + C \cdot (-e^{-y})\right] + C \cdot e^{-y} = xy$ → $\frac{\partial C}{\partial y} \cdot e^{-y} = xy$ → $\int \frac{\partial C}{\partial y} \cdot e^{-y} \cdot dy = \int xy \cdot dy$ jetzt e^{-y} auf rechte Seite:

$C(x,y) = x \cdot \int e^y y \cdot dy$ →Merzinger S.109→ $C(x,y) = x(y-1) \cdot e^y$ → $p_{part} = x(y-1) \cdot e^y \cdot e^{-y} = \boxed{x(y-1)}$

III) allgemeine Lösung

$p_{ges} = p_{hom} + p_{part} = C(x) \cdot e^{-y} + x(y-1)$ jetzt Rücksubstituieren

$z_x = p(x,y) = C(x) \cdot e^{-y} + x(y-1)$ (nochmal nach x integrieren)

Allgemeine Lösung: $\boxed{z = G(x) \cdot e^{-y} + 1/2x^2(y-1) + H(x)}$