

Statik der Flüssigkeiten und Gase

Auftriebskraft

$$\frac{d\rho}{dz} = C$$

$$d\rho = C \cdot dz \quad C \dots \text{Dichtegradient im Medium (z.B. Konst.)}$$

$$\sum_i F_i = 0 \quad \Rightarrow \quad F_g = F_a \quad F_a \dots \text{Auftriebskraft}$$

$$m_K = \rho_K \cdot V_K$$

$$m_{Fl} = \int_m dm$$

mit:

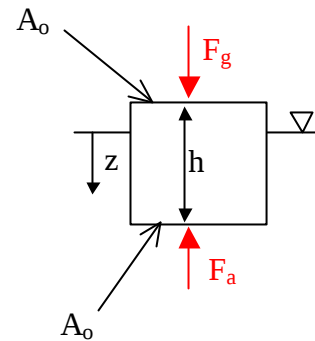
$$dm = dV \cdot \rho(z)$$

$$dV = A_o \cdot dz$$

$$d\rho = C \cdot dz \quad \Rightarrow \quad \rho = C \cdot z + K$$

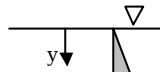
$$\rho(z) = C \cdot z + \rho_o$$

einsetzen $\Rightarrow$ Integral lösen $\Rightarrow$ gesuchte Größe ausrechnen



Druck, Kraft, Moment

$$p(y) = \rho \cdot g \cdot y \quad (\text{Schweredruck})$$

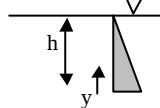


$$F = p \cdot A$$

$$P = \frac{F}{A}$$

$$F_{\text{flieh}} = \omega^2 \cdot r \cdot m$$

$$p(y) = \rho \cdot g \cdot (h - y)$$



$$dF = p(y) \cdot dA$$

$$dA = b \cdot dy \quad b \dots \text{Breite (konst.)}$$

$$M = F \cdot l$$

$$dM = dF \cdot l$$

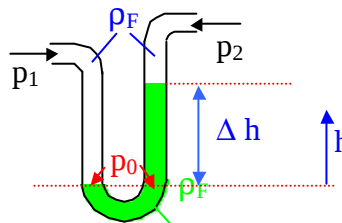
$l \dots$ Hebelweg

U-Rohr

$$p_o = p_1 + \rho_F \cdot g \cdot h_1$$

$$p_o = p_2 + \rho_F \cdot g \cdot (h_2 - \Delta h) + \rho_M \cdot g \cdot \Delta h$$

$\Rightarrow$ gleichsetzen !!



reibungsfreie Fadenströmung

Kontinuitätsgleichung

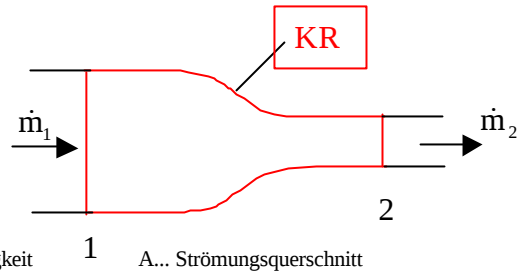
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_n \quad \dot{m} = \rho \cdot \dot{V} \quad \dot{V} = c \cdot A$$

für $\rho = \text{konst.} \Rightarrow \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \text{konst.}$

$$\Rightarrow c_1 \cdot A_1 = c_2 \cdot A_2$$

c... Geschwindigkeit

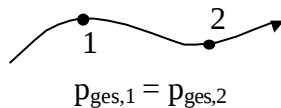
A... Strömungsquerschnitt



$$\Rightarrow c_1 \cdot A_1 + c_2 \cdot A_2 = c_3 \cdot A_3 \quad \text{bei 2x Eingang und 1x Ausgang}$$

Eulergleichung

$$0 = c \cdot dc + \frac{1}{\rho} \cdot dp + g \cdot dh$$



Bernoulligleichung

$$p_{\text{ges}} = \frac{\rho}{2} c^2 + p + \rho \cdot g \cdot h = \text{konst.}$$

dyn. Druck
(Staudruck)

örtl. Druck
statischer Druck (reduzierter Druck)

Schweredruck

Lösung:

- Bezugshöhe h festlegen
- Stromfäden einzeichnen (KR)
- Bgl. zwischen den Ebenen ausführlich hinschreiben
- mit Randbedingungen vereinfachen
- unbekannte Geschwindigkeit durch Konti-gl. ermitteln
- nach gesuchter Größe auflösen $\Rightarrow$ Berechnen!

(können auch am Rande
verlaufen $\Rightarrow$ Aufg. 2-1)

(erst Ein/Austritt)

stationär:

$$\frac{\rho}{2} c_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 = \frac{\rho}{2} c_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

- zur Bezugshöhe

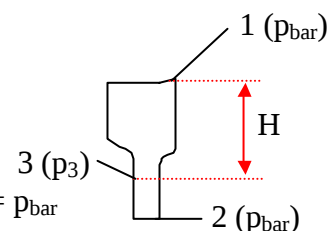
- wenn (1) bzw. (2) Oberfläche bzw Austritt dann $p = p_{\text{bar}}$

- senkrechter Strom : $p_3 = p_{\text{bar}} + \rho \cdot g \cdot H$ (H...Höhe der „Last“ obentrüber)

- wenn eine große Oberfläche gegeben (z.B. sehr großes Becken) ist $c_1 = 0$!!

instationär:

$$\frac{\rho}{2} c_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \int_0^{s_1} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\rho}{2} c_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \int_0^{s_2} \frac{\partial c}{\partial t}$$



Geschwindigkeitsmessung mit Prandtlrohr

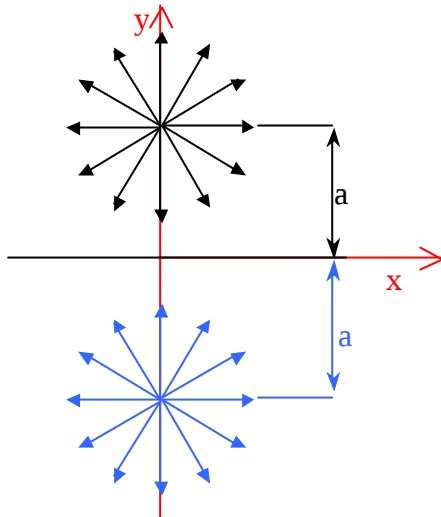
$$c_o = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta H \cdot \frac{(\rho_M - \rho_0)}{\rho_0}}$$

zweidimensionale, reibungsfreie Strömung, Singularitätenverfahren

Potentialfunktion Φ und Stromfunktion ψ und Geschwindigkeit $c \Rightarrow$ US. 110-113

$$\psi_{\text{ges}} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_i = \text{konst!}$$

Quelle + Wand $\Rightarrow$ 2 Quellen



$$c_{x,\text{ges}} = c_{x_{Q1}} + c_{x_{Q2}}$$

$$c_{x,\text{ges}} = \frac{Q_1}{2\pi b} \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{Q_2}{2\pi b} \cdot \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$c_{y,\text{ges}} = c_{y_{Q1}} + c_{y_{Q2}}$$

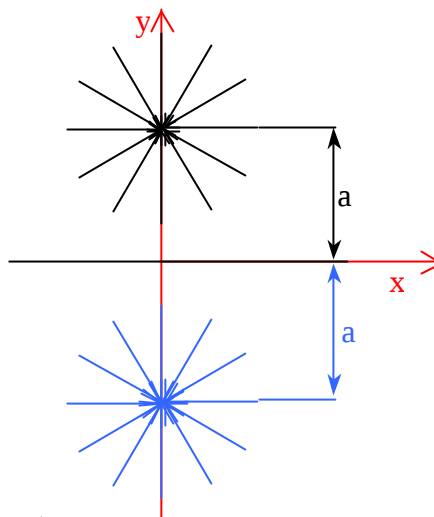
$$c_{y,\text{ges}} = \frac{Q_1}{2\pi b} \cdot \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{Q_2}{2\pi b} \cdot \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$c_{\text{ges}} = \sqrt{c_{x,\text{ges}}^2 + c_{y,\text{ges}}^2}$$

mit $Q_1 = Q_2 = Q$

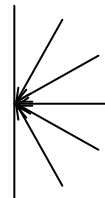
$$c_{x,\text{ges}} = \frac{Q}{2\pi b} \left(\frac{x}{x^2 + (y-a)^2} + \frac{x}{x^2 + (y+a)^2} \right)$$

Senke + Wand $\Rightarrow$ 2 Senken



bei Senken in der Wand:

$$Q = 2\dot{V} \quad (\text{weil nur die Hälfte genutzt wird})$$



Quelle „1“ um +a auf der y- Achse verschoben! $\Rightarrow$ -a

Quelle „2“ entgegengesetzt! $\Rightarrow$ +a

Impulssatz, Energiesatz

Impulssatz:

$$\underbrace{\vec{J}_{1A} - \vec{J}_{2A}}_{\vec{J}_{1E} - \vec{J}_{2R}} + \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_\tau + \vec{F}_H$$

Impulsströme

$F_g \dots$ Schwerkraft
 $F_p \dots$ Druckkraft
 $F_\tau \dots$ Reibungskraft
 $F_H \dots$ Haltekraft

} Oberflächenkräfte

$$\dot{J} = \rho \cdot A \cdot c^2 = \dot{m} \cdot c$$

$$F_p = (p - p_{\text{bar}}) \cdot A$$

- 1.) Kontrollraum zeichnen
- 2.) Alle Kräfte zeigen in den KR hinein
- 3.) Kräftegleichgewichte aufstellen
- 4.) Stromfäden einzeichnen
- 5.) weiter mit Konti- und Bgl.

Grundgleichungen eindimensionaler, gasdynamischer Strömungen

allgemeine Gasgleichung:

$$p = \rho \cdot R \cdot T$$

Isentropenbeziehung:

$$\frac{p}{p_R} = \left(\frac{\rho}{\rho_R} \right)^\kappa = \left(\frac{T}{T_R} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

Bernoulligleichung:

$$\frac{c^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{konst} \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \text{konst}$$

$$c^2 = \frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_R}{\rho_R} \left[1 - \left(\frac{p}{p_R} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \quad \Rightarrow \quad c^2 = \frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho} \left[\left(\frac{p_R}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\rho \cdot c \cdot A = \text{konst.}$$

Machzahl: $\Rightarrow$ [US. 128](#)

$$M = \frac{c}{a}$$

krit. Machzahl:

$$M^* = \frac{c}{a^*}$$

Schallgeschwindigkeit:

$$a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} \quad \text{krit. Schallgeschw.}$$

$$a^* = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} \cdot R \cdot T_R}$$

kritische Verhältnisse:

$$\frac{p^*}{p_R} = 0,526$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_R} = 0,634$$

$$\frac{T^*}{T_R} = 0,833$$

$$\dot{m} = \rho^* \cdot a^* \cdot A^* \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \frac{\rho}{\rho_R} \cdot \rho_R^* \cdot a^* \cdot A^* \quad \text{mit } \rho_R = \frac{p}{RT}$$

Verhältnisse: $\frac{A^*}{A} \quad \frac{p}{p_R} \quad \frac{\rho}{\rho_R} \quad \frac{T}{T_R} \quad \frac{\hat{p}_R}{p_R}$ sowie M^* und M

⇒ Diagramm Seite 128

Mehrdim. reibungsbehaftete Strömung, Navier-Stokes'sche Glg, mech. Ähnlichkeit

$$Sh = \frac{l}{\bar{t} \cdot \bar{c}} \quad \text{Strouhal-Zahl} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{lokale_Beschleunigung}}{\text{konvektive_Beschleunigung}}$$

$$Eu = \Lambda = \frac{Ha}{Re} = \frac{\overline{\Delta p}}{p \cdot \bar{c}^2} \quad \text{Euler-Zahl} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{Druckkraft}}{\text{Trägheitskraft}}$$

$$Fr = \frac{\bar{c}}{\sqrt{g \cdot l}} \quad \text{Froude-Zahl} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Schwerkraft}}$$

$$Re = \frac{\bar{c} \cdot l}{\nu} \quad \text{Reynolds-Zahl} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}}$$

l ... char. Länge

vollständige mechanische Ähnlichkeit (**geometrisch**, **kinematisch**, **dynamisch**)

a) Modell: $\frac{l_{1, \text{Modell}}}{l_{1, \text{Orig}}} = \frac{l_{2, \text{Modell}}}{l_{2, \text{Orig}}} = \text{konst.}$ b) $\frac{c_{1, \text{Modell}}}{c_{1, \text{Orig}}} = \frac{c_{2, \text{Modell}}}{c_{2, \text{Orig}}} = \text{konst.}$

c) $Re_M = Re_{\text{Orig}}$ $\frac{\bar{c}_{\text{Modell}} \cdot D_{\text{Modell}}}{\nu_{\text{Modell}}} = \frac{\bar{c}_{\text{Orig}} \cdot D_{\text{Orig}}}{\nu_{\text{Orig}}} \Rightarrow \frac{\bar{c}_{\text{Modell}}}{\bar{c}_{\text{Orig}}} = \frac{D_{\text{Orig}}}{D_{\text{Modell}}} \cdot \frac{\nu_{\text{Modell}}}{\nu_{\text{Orig}}}$

reibungsbehaftete Rohrströmung

BGL ① $\Rightarrow$ ②

$$p_{\text{ges},1} = p_{\text{ges},2} + \sum \Delta p_{v,\text{ges}:(1) \rightarrow (2)} - \sum \Delta p_p$$

...+ p_v verursacht durch: Reibung, Austritt, Krümmer, Ventil...

...- p_p hinzugefügte Pumpenleistung

mit $\Delta p_{\text{Bauteil}} = \frac{\rho}{2} \bar{c}_2^2 \cdot \xi$ ξ ... Verlustbeiwert

$$\Delta p_{\text{Rohr}} = \frac{\rho}{2} \bar{c}_2^2 \cdot \lambda \cdot \frac{l}{d}$$
 λ ... Rohrreibungsbeiwert

laminar ($Re < 2320$) :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

turbulent: k ... Rautiefe

$$\lambda = f(Re, d/k) \Rightarrow \text{US. 118}$$

$$Re = \frac{\bar{c} \cdot l}{\nu} \quad \bar{c} = \frac{\dot{V}}{A}$$

wenn kein Rohr dann $d = d_{gl}$

$$d_{gl} = 4 \frac{A}{U}$$

A ... durchströmter Querschnitt

U ... benetzter Umfang

Bsp.:

$$\sum \Delta p_{v,\text{ges}:(1) \rightarrow (2)} = \frac{\rho}{2} \bar{c}_1^2 \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \xi_{Kr_1} + \xi_{V_1} \right) + \frac{\rho}{2} \bar{c}_2^2 \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \xi_{Kr_2} + \xi_{V_2} \right) + \frac{\rho}{2} \bar{c}_1^2$$

Rohr Krümmer Ventil Austrittsverlust (Rohr $\Rightarrow$ Becken)

c_w - Wert

Kräftegleichgewicht:

$$\text{Bsp.: } F_A + F_w - F_g = 0$$

$$F_w = F_g - F_A$$

$$c_w \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c^2 \cdot A_K = V_K \cdot \rho_K \cdot g - V_K \cdot \rho \cdot g$$

$$\dot{V} = A \cdot c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\dot{V}}{A}$$

