

1.1. Einleitung und Kennwerte

Trägheitsmomente wirken an rotierenden Teilen oder Körpern und geben eine Auskunft darüber, wie groß ein Antriebsmoment sein muss, um einen Körper in eine rotatorische Bewegung, mit einer bestimmten Drehgeschwindigkeit, zu versetzen. Die Massenträgheitsmomente eines Fahrzeugs haben großen Einfluss auf sein Eigenschwingverhalten und auf die Neigung des Fahrzeuges zum Wanken, Schwimmen oder Nickbewegungen auszuführen. Denn all dies sind rotatorische Bewegungen des Fahrzeuges um seine Achsen. Nicken bezeichnet man die Bewegungen um die Fahrzeugquerachse, Wankvorgänge geschehen entlang der Fahrzeugquerachse, Schwimmen erfolgt entlang der Hochachse des Fahrzeugs.

Die Kenntnis des Eigenschwingverhaltens ist notwendig, um bestimmte Frequenzbereiche der Karosserieschwingung zu umgehen. In diesen Frequenzbereichen können z.B. bei Passagieren Übelkeit auftreten, man spricht hier von Reisekrankheit. Was daran liegt, dass die Frequenz des Aufbaus die gleiche Frequenz aufweist, wie menschliche Organe, was zu Resonanzen führt.

Die Bewegungen um die Fahrzeugachsen können sich negativ auf die Fahrstabilität in bestimmten Situationen auswirken (z.B. Kurvenfahrt).

Abmessungen und Kennwerte des Pendelrahmens			
Achse A - Mitte Rahmen	b_A	150	mm
Achse B – Mitte Rahmen	b_B	200	mm
Achse A - Abstützfeder	L_A	895	mm
Achse B - Abstützfeder	L_B	1800	mm
Steifigkeit Abstützfeder	c	39,079	$\frac{N}{mm}$
Steifigkeit Torsionfeder	c_T	13430	$\frac{Nm}{mm}$
Gewichtskraft Pendelrahmen	G_R	7913,76	N
Schwerpkt. Pendelrahmen - Aufstandsfl. Räder	h_R	-68	mm
Achse A - Aufstandsfläche Räder	J_{ax}	310	mm
Achse B - Aufstandsfläche Räder	J_{ax}	210	mm

Trägheitmomente der ungefederten Massen durch den Schwerpunkt			
um die Fahrzeuglängsachse	J_{ax}	46,48	kg*m ²
um die Fahrzeugquerrichtung	J_{ay}	157,39	kg*m ²
um die Hochsachse des Fahrzeugs	J_{az}	218,43	kg*m ²

1.2. Prüfstands Aufbau

Der Prüfstand besteht aus einem Pendelrahmen, der auf Schneiden gelagert ist, um einen möglichst geringen Verlust durch Reibung bei der Pendelung zu erzielen. Des Weiteren werden zur Versuchsdurchführung eine Stoppuhr und ein Pendelrahmen benötigt. Die Stoppuhr dient zur Messung der Schwingzeiten, die der Pendelrahmen für eine vorgegebene Anzahl von Schwingungen braucht.

1.3. Versuchsdurchführung

Die Vorbereitungen entsprechen denen im Abschnitt Schwerpunktbestimmung beschriebenen. Hierbei ist die Blockierung der Federn auch noch aus einem anderen Grund nötig. Blockiert man die Federn nicht, so wird das System PKW-Pendelrahmen zu einem Mehrmassenschwinger. Für diesen jedoch kann das vorgegebene Berechnungsmodell nicht genutzt werden und das anzuwendende Modell würde sich stark komplizieren. Weiterhin ist zur Vereinfachung der Rechnung darauf zu achten, dass der Schwerpunkt des Pendelrahmens (dieser ist bekannt) und der Schwerpunkt des PKW auf einer gemeinsamen Hochachse liegen (Achse senkrecht zur Fahrbahnebene). Hierzu muss der Pkw auf dem Rahmen mittels Zollstock und Deckenkran ausgerichtet werden.

1.4. Messwerte, Berechnung der Trägheitsmomente J_{AX} und J_{AZ}

1.4.1. Trägheitsmoment J_{AX} des gefederten Aufbaus um die Längsachse X durch den Aufbauschwerpunkt S_A

1.4.1.1. Pendelung von Pendelrahmen und Fahrzeug um eine zur Fahrzeuglängsachse parallele Achse A

Gewicht von Rahmen und Fahrzeug

$$G_{RW} = G_R + G_W = 7913,76N + 9930N = 17843,76N$$

Höhe h_{RW} des Gesamtschwerpunktes S_{RW} von Rahmen und Fahrzeug über der Reifenaufstandfläche

$$h_{RW} = \frac{h_R \cdot G_R + h_W \cdot G_W}{G_{RW}} = \frac{-68mm \cdot 7913,76 + 550,12mm \cdot 9930N}{17843,76N} = 275,98mm$$

Als Zeit für 20 Schwingungen wurde ermittelt

mit Fahrzeug		
Messung / Achse	um A [s]	um Z [s]
1	37,50	64,00
2	37,00	63,50
3	37,50	63,90
Schnitt	37,33	63,80
nur Rahmen		
1	17,00	48,90
2	17,00	49,50
3	17,00	49,50
Schnitt	17,00	49,30

$$T_{RWA20} = 37,33s$$

$$T_{RWA} = \frac{37,33s}{20} = 1.867s$$

Das Trägheitsmoment von Pendelrahmen und Fahrzeug um die Schneidenachse A ist damit

$$J_{RWA} := \frac{[c \cdot S \cdot L_A^2 - G_{RW} \cdot (q_A + h_{RW})] \cdot T_{RWA}^2}{4 \cdot \pi^2} \quad J_{RWA} = 1.841 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.1.2. Pendelung des Rahmens um die Achse A

$$T_{RA20} := 17 \text{ s} \quad T_{RA} := \frac{T_{RA20}}{20} \quad T_{RA} = 0.85 \text{ s}$$

Trägheitsmoment des Rahmens um die Schneidenachse A

$$G_R := 7913.76 \text{ N} \quad h_R := -68 \text{ mm}$$

$$J_{RA} := \frac{\left[c_S \cdot L_A^2 - G_R \cdot (q_A + h_R) \right] \cdot T_{RA}^2}{4 \cdot \Pi^2} \quad J_{RA} = 538.04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.1.3. Trägheitsmoment des Fahrzeuges um die Schneidenachse A

$$J_{WA} := J_{RWA} - J_{RA} \quad J_{WA} = 1.303 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.1.4 Trägheitsmoment J_{WX} des Fahrzeuges um die Längsachse X durch den Fahrzeugschwerpunkt S_W

Abstand s_{WX} des Fahrzeugschwerpunktes S_W von der Pendelachse A

$$h_W := 550.12 \text{ mm} \quad b_A := 150 \text{ mm}$$

$$s_{WX} := \sqrt{(h_W + q_A)^2 + b_A^2} \quad s_{WX} = 873.102 \text{ mm}$$

Trägheitsmoment J_{WX}

$$G_W := 9930 \text{ N}$$

$$m_W := \frac{G_W}{g} \quad m_W = 1.013 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$J_{WX} := J_{WA} - m_W \cdot s_{WX}^2 \quad J_{WX} = 531.431 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.1.5. Trägheitsmoment J_{ax} der ungefederten Achsmassen um die Längsachse X durch den Achschwerpunkt S_a

$$J_{aX} := 46.48 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.1.6. Trägheitsmoment J_{ax/S_W} der ungefederten Achsmassen um die Längsachse X durch den Fahrzeugschwerpunkt S_W

Abstand s_{aX} zwischen den Schwerpunkten S_W und S_a

$$b_R := 705.71 \text{ mm} \quad b_{aR} := 710 \text{ mm}$$

$$s_{aX} := \sqrt{(b_R - b_{aR})^2 + (h_W - h_a)^2} \quad s_{aX} = 249.16 \text{ mm}$$

Trägheitsmoment J_{axS_W}

$$m_a := \frac{G_a}{g} \quad m_a = 120.02 \text{ kg}$$

$$J_{axS_W} := J_{aX} + m_a \cdot s_{aX}^2 \quad J_{axS_W} = 53.931 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.1.7. Trägheitsmoment J_{AX/S_W} des gefederten Aufbaus um die Längsachse X durch den Fahrzeugschwerpunkt S_W

$$J_{AXS_W} := J_{WX} - J_{axS_W} \quad J_{AXS_W} = 477.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.1.8. Trägheitsmoment J_{AX} des gefederten Aufbaus um die Längsachse X durch den Aufbauschwerpunkt S_A

Abstand s_{AX} zwischen den Schwerpunkten S_W und S_A

$$b_{AR} := 703.51 \text{ mm} \quad b_R = 0.706 \text{ m}$$

$$s_{AX} := \sqrt{(b_R - b_{AR})^2 + (h_W - h_A)^2} \quad s_{AX} = 33.57 \text{ mm}$$

Trägheitsmoment J_{AX}

$$m_A := \frac{G_A}{g} \quad m_A = 892.56 \text{ kg}$$

$$J_{AX} := J_{AXS_W} - m_A \cdot s_{AX}^2 \quad J_{AX} = 476.49 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.2. Trägheitsmoment J_{AZ} des gefederten Aufbaus um die Hochachse Z durch den Aufbauschwerpunkt S_A

1.4.2.1. Pendelung des Pendelrahmens mit Fahrzeug um die Hochachse Z durch den Fahrzeugschwerpunkt S_W

$$T_{RWZ20} := 63.8 \text{ s} \quad T_{RWZ} := \frac{T_{RWZ20}}{20} \quad T_{RWZ} = 3.19 \text{ s}$$

Das Trägheitsmoment von Pendelrahmen und Fahrzeug um die Hochachse Z

$$c_T := 13430 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

$$J_{RWZ} := \frac{c_T}{4 \cdot \pi^2} \cdot T_{RWZ}^2 \quad J_{RWZ} = 3.463 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.2.2. Pendelung des Pedelrahmens um die Hochachse Z

$$T_{RZ20} := 49.3 \text{ s} \quad T_{RZ} := \frac{T_{RZ20}}{20} \quad T_{RZ} = 2.46 \text{ s}$$

Trägheitsmoment des Pedelrahmens um die Hochachse Z

$$J_{RZ} := \frac{c_T}{4 \cdot \pi^2} \cdot T_{RZ}^2 \quad J_{RZ} = 2.068 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.2.3. Trägheitsmoment J_{WZ} des Fahrzeuges um die Hochachse Z durch den Fahrzeugschwerpunkt S_W

$$J_{WZ} := J_{RWZ} - J_{RZ}$$

$$J_{WZ} = 1.395 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.2.4. Trägheitsmoment J_{aZ} der ungefederten Achsmassen um die Hochachse Z durch den Achschwerpunkt S_W

$$J_{aZ} := 218.43 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.2.5. Trägheitsmoment J_{aZ/S_W} der ungefederten Achsmassen um die Hochachse Z durch den Fahrzeugschwerpunkt W_S

Abstand s_{aZ} zwischen den Schwerpunkten S_W und S_a

$$s_{aZ} := \sqrt{(b_R - b_{aR})^2 + (a_V - a_{AV})^2} \quad s_{aZ} = 84.9 \text{ mm}$$

Trägheitsmoment J_{aZ/S_W}

$$m_a := \frac{G_a}{g}$$

$$m_a = 120.02 \text{ kg}$$

$$J_{aZ/S_W} := J_{aZ} + m_a \cdot s_{aZ}^2$$

$$J_{aZ/S_W} = 219.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.2.6. Trägheitsmoment $J_{AZ/S}$ des gefederten Aufbaus um die Hochachse Z durch den Fahrzeugschwerpunkt S

$$J_{AZ/S} := J_{WZ} - J_{aZ/S_W}$$

$$J_{AZ/S} = 1.176 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.4.2.7. Trägheitsmoment J_{AZ} des gefederten Aufbaus um die Hochachse Z durch den Aufbauschwerpunkt S_W

Abstand s_{AZ} zwischen den Schwerpunkten S_W und S_A

$$s_{AZ} := \sqrt{(b_R - b_{AR})^2 + (a_V - a_{AV})^2} \quad s_{AZ} = 84.9 \text{ mm}$$

Trägheitsmoment J_{AZ}

$$m_A := \frac{G_A}{g} \quad m_A = 892.56 \text{ kg}$$

$$J_{AZ} := J_{AZS_W} - m_A \cdot s_{AZ}^2 \quad J_{AZ} = 1.17 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.5. Fehlerrechnung

Die maximalen Fehler bei einer Einzelmessung

Genauigkeit der Stoppuhr: $\Delta t = \pm 0,2s$

Anzahl der Perioden pro Messung: $n = 20$

Fehler pro Schwingung: $\Delta T = \frac{\Delta t}{n} = \frac{\pm 0,22}{20} = \pm 0,01s$

Die Grundlagen zur Berechnung der Fehler sollen an dieser Stelle am Beispiel des Trägheitmomentes gezeigt werden.

Die Ausgangsgleichung lautet:
$$J_{RWA} = \frac{c_S \cdot L_A^2 - G_W \cdot (q_A + h_{RW})}{4\pi^2} \cdot T_{RWA}^2$$

Allgemein gesprochen wird eine Funktion F nach ihren mit Messunsicherheiten behafteten Variablen partiell abgeleitet (hier sind x_1 , x_2 , und x_3 Variablen):

$$F = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_3}$$

→ die partielle Ableitung führt zum absoluten Fehler:

$$\Delta F = \sum_{i=1}^n \frac{\delta F}{\delta x_i} \cdot \Delta x_i = \frac{\delta F}{\delta x_1} \Delta x_1 + \frac{\delta F}{\delta x_2} \Delta x_2 + \frac{\delta F}{\delta x_3} \Delta x_3$$

Teilt man nun den absoluten Fehler durch den Funktionswert F erhält man den relativen Fehler:

$$\frac{\Delta F}{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta F}{\delta x_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{F} = \frac{\delta F}{\delta x_1} \frac{\Delta x_1}{F} + \frac{\delta F}{\delta x_2} \frac{\Delta x_2}{F} + \frac{\delta F}{\delta x_3} \frac{\Delta x_3}{F}$$

Die einzige Messunsicherheit die bei der Bestimmung der Trägheitsmomente berücksichtigt werden kann bzw. bekannt ist, ist die Messunsicherheit der Stoppuhr.

Somit wird die obenstehende Gleichung lediglich nach der Zeit T_{RWA} abgeleitet:

$$\frac{\delta J_{RWA}}{\delta T_{RWA}} = 2 \cdot \frac{c_S \cdot L_A^2 - G_W \cdot (q_A + h_{RW})}{4\pi^2} \cdot T_{RWA}$$

Und damit:

$$\text{Relativer Fehler: } \frac{\Delta J_{RWA}}{J_{RWA}} = \left| \frac{\delta J_{RWA}}{\delta T_{RWA}} \right| \cdot \frac{\Delta T_{RWA}}{J_{RWA}}$$

$$\text{Absoluter Fehler: } \Delta J_{RWA} = \left| \frac{\delta J_{RWA}}{\delta T_{RWA}} \right| \cdot \Delta T_{RWA}$$

(Dieses gilt in ähnlicher Weise z.B. auch für das Trägheitsmoment J_{RA} .)

1.5.1. Relativer Fehler bei der Ermittlung des Trägheitsmomentes von Rahmen und Wagen bezüglich der Pendelachse A

$$\left| \frac{\Delta J_{RWA}}{J_{RWA}} \right| = 2 * \left| \frac{\Delta T_{RWA}}{T_{RWA}} \right| = 2 * \frac{0,01s}{1,867s} = 0,011 = 1,07\%$$

Relativer Fehler bei der Ermittlung des Rahmenträgheitsmomentes bezüglich der Pendelachse A:

$$\left| \frac{\Delta J_{RA}}{J_{RA}} \right| = 2 * \left| \frac{\Delta T_{RA}}{T_{RA}} \right| = 2 * \frac{0,01s}{0,85s} = 0,024 = 2,4\%$$

absolute Fehler

$$\Delta J_{RWA} = \left| \frac{\Delta J_{RWA}}{J_{RWA}} \right| * J_{RWA} = 0,011 * 1841 * 10^3 \text{ kg} * \text{m}^2 = 20,24 \text{ kg} * \text{m}^2$$

$$\Delta J_{RA} = \left| \frac{\Delta J_{RA}}{J_{RA}} \right| * J_{RA} = 0,024 * 538,04 \text{ kg} * \text{m}^2 = 12,91 \text{ kg} * \text{m}^2$$

Der absolute Fehler des Fahrzeugträgheitsmomentes um die Pendelachse A entspricht dem absoluten Fehler des Fahrzeugträgheitsmomentes um die Längsachse durch den Schwerpunkt.

$$|J_{WA}| = |\Delta J_{RWA}| + |\Delta J_{RA}| = |\Delta J_{WX}| = 20,24 \text{ kg} * \text{m}^2 + 10,98 \text{ kg} * \text{m}^2 = 33,15 \text{ kg} * \text{m}^2$$